

特性曲線法による平面流れの数値解析

京都大学工学部 正 員 岩佐 義朗
 京都大学工学部 正 員 ○井上 和也
 京都大学大学院 学生員 田中 靖
 京都大学大学院 学生員 長内 進

1.はじめに：本報は、平面流れの数値解析に特性曲線法を適用しようとしたもので、まず、基礎式を特性曲線表示に改めてその差分化を行ない、これと従来の基礎式を直接差分化する方法との比較を行なう。本計算法の特徴を明らかにするとともに、琵琶湖南湖の湖流解析を実施した結果からも本計算法の特徴を検討したものである。

2.基礎式およびその特性曲線表示：従来の方法との比較を行なう便宜上、流量flux表示による二次元一層model(図1)を適用するものとし、しかも流れの移流的变化が比較的緩やかであるとして、非線型項を省略した次式を基礎式とする。

$$\text{連続式} \quad : \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\text{運動方程式} : \quad \frac{\partial M}{\partial t} + g(h+\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x} - F_x = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + g(h+\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial y} - F_y = 0 \quad (3)$$

ここで、記号は図1に示すとおりであり、 $F_x = fN + \frac{1}{f} \{T_x(s) - T_x(b)\}$, $F_y = -fM + \frac{1}{f} \{T_y(s) - T_y(b)\}$ で、 f : Coriolisの因子、 $T_{x,y}(s)$: 水表面に作用するせん断力、 $T_{x,y}(b)$: 湖底におけるせん断力 である。つぎに、上式を前報²⁾と同様の方法により、特性曲線表示に改める。特性曲面の一つは図2に示されるような Monge の錐 $[(\frac{x}{C_0})^2 + (\frac{y}{C_0})^2 = \zeta^2]$ となり、この曲面上での基礎式の特性曲線表示は次式のように表される。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{C_0} \cos \theta \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{1}{C_0} \sin \theta \frac{\partial N}{\partial t} - \sin \theta \frac{\partial M}{\partial \theta} + \cos \theta \frac{\partial N}{\partial \theta} - \frac{1}{C_0} \cos \theta F_x - \frac{1}{C_0} \sin \theta F_y = 0 \quad (4)$$

ただし、 $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial \theta} = -\sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial y}$ であり、 θ は特性曲面上のある点から立てた法線vectorをxy-平面に投影したvectorがx軸となす角とする。

3.基礎式の差分化および従来の差分式との比較：本報では、(4)式から得られる、 $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ の4方向の陪特性曲線に沿った関係式を差分化する方法(図3)をとった。その結果、点Pの流量flux、および水位は次式のように求められる。

$$M_P = \frac{M_R + M_L}{2} - \frac{C_0}{2} (\zeta_R - \zeta_L) + [F_x]_0 \cdot \Delta t$$

$$N_P = \frac{N_U + N_D}{2} - \frac{C_0}{2} (\zeta_U - \zeta_D) + [F_y]_0 \cdot \Delta t \quad (5)$$

$$\zeta_P = \frac{\zeta_R + \zeta_L + \zeta_U + \zeta_D}{4} - \frac{1}{4C_0} (M_R - M_L + N_U - N_D) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right)_0 \cdot \Delta t$$

添字は図3の各点における値であることを示し、上式で必要な点R,L,U,Dにおける値は当該点の周辺格子の中央での値より内挿して求められるが、ここで一次内挿、二次内挿をひとまとめにし、しかも、前報で述べた数値拡散項の影響について考察するためにも、便宜

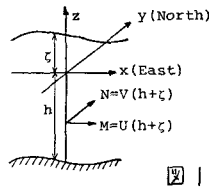


図1

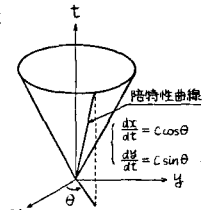


図2

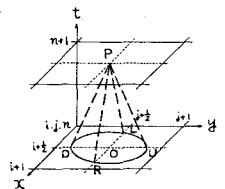


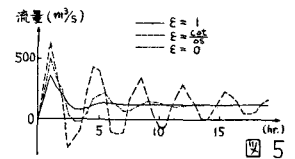
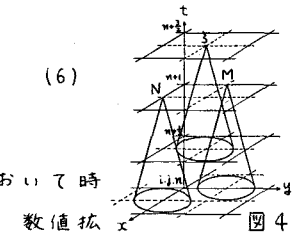
図3

的に係数 ε を導入することにする。すなわち、(5)式は以下のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} (M_{i,j,t}^{n+1} - M_{i,j,t}^n) / \Delta t &= -c^2 (S_{i,j,t}^{n+1} - S_{i,j,t}^n) / (2\Delta s) + [E_{i,j,t}^n + \varepsilon C / (2\Delta s) (M_{i,j,t}^n - 2M_{i,j,t}^{n+1} + M_{i,j,t}^{n+2}) \\ (N_{i,j,t}^{n+1} - N_{i,j,t}^n) / \Delta t &= -c^2 (S_{i,j,t}^{n+1} - S_{i,j,t}^n) / (2\Delta s) + [F_{i,j,t}^n + \varepsilon C / (2\Delta s) (N_{i,j,t}^n - 2N_{i,j,t}^{n+1} + N_{i,j,t}^{n+2}) \\ (S_{i,j,t}^{n+1} - S_{i,j,t}^n) / \Delta t &= -(M_{i,j,t}^n - M_{i,j,t}^{n+1}) / (2\Delta s) - (N_{i,j,t}^n - N_{i,j,t}^{n+1}) / (2\Delta s) \\ &\quad + \varepsilon C / (4\Delta s) \{ (S_{i,j,t}^{n+1} - 2S_{i,j,t}^{n+2} + S_{i,j,t}^{n+3}) + (S_{i,j,t}^{n+1} - 2S_{i,j,t}^{n+2} + S_{i,j,t}^{n+3}) \} \end{aligned} \quad (6)$$

ただし、 $\varepsilon=1$ は一次内挿、 $\varepsilon=\frac{C\Delta t}{\Delta s}$ は二次内挿、 $\varepsilon=0$ は特性曲線法において時間差分として陪特性曲線の方角そのものを含まない差分を用いた、数値拡散項を含まない場合である。 $\varepsilon=0$ の場合で、かつ時間的および空間的にずらした差分化(図4)を行えば、従来の multi-level staggered scheme の差分式と完全に一致することがわかる。

4. 琵琶湖南湖の湖流の数値解析への適用：前述したことにより、3種類の数値拡散項の係数 $(1, \frac{C\Delta t}{\Delta s}, 0)$ のそれぞれについて、図4のように空間および時間の差分のとり方に“ずらし”を考えた場合の scheme を導いた。(つまりずらしを考慮しない場合、空間的なずらしだけを



ずらしだけを考慮する場合、および空間と時間の両方についてずらしを考慮する場合の4種類である。) これらの計12種類の差分式を用いて前報と同様な条件のもとに琵琶湖南湖の湖流の数値simulationを実施した。その結果、時間的ずらしが安定性に

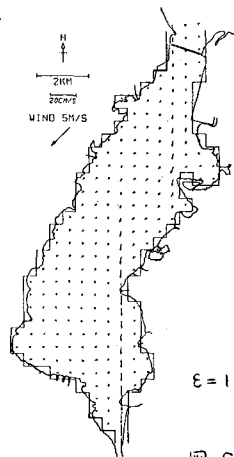


図6

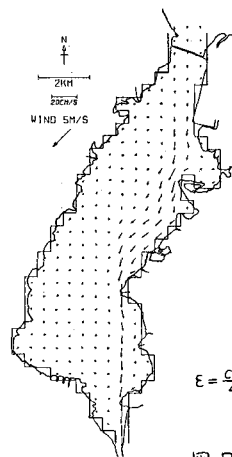


図7

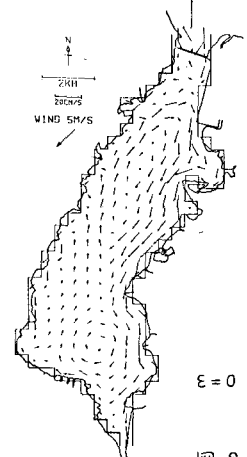


図8

対してよい影響を与えること、および北端から南湖へ流入する流量の時間的な変化ならびに南湖内の流速分布に対して scheme の違いよりも数値拡散項(ε の値)によって結果が支配されることがわかった。すなわち、 ε の値が $0, \frac{C\Delta t}{\Delta s}$ (この場合約0.25), 1と変化するにつれて北端からの流入流量(図5)にみられる静振の減衰が早まり、また流速vector図(図6~図8)では環流が消滅した結果となっている。(なお、これらはいずれも北東風の場合の結果である。)

5. おわりに：従来の差分式が scheme の違いや数値拡散項の有無によって、特性曲線法による差分式の中に位置づけられることから、特性曲線法による平面流れの数値解析の可能性が見い出された。しかし、この方法は理論的には特性曲面上の関係式において特性方向以外の向きの微分が含まれること、無数の陪特性曲線に沿う特性関係が存在し、しかも相互の独立性が明確でないことなどの難しい点が含まれており、さらに数値計算上においても差分式に含まれる数値拡散項の扱いなどにおいて検討すべき点が多く、いずれも今後の課題とされよう。《参考文献》1) 岩佐・井上・片山, 第32回年講Ⅱ-139, 1977 2) 吉田・岩佐・井上, 第34回年講Ⅱ-117, 1979