流出系のフィルタリングと予測に関する基礎的研究

京都大学工学部　正員　高棹琢馬，椎葉充晴
飛島建設　正員　東京正弘
京都大学大学院　学生員　○宝　馨，杉岡篤

［1］ 序　筆者らは，気象・流出システムを状態空間法によるモデルで表現し、Kalman 流のフィルタリング・予測理論を適用した流出予測について検討してきた[1]。その際，システム方程式に存在する攪乱項の統計的パラメータを既知と仮定しており、不十分であった。本研究では，この統計的パラメータの逐次推定方式を新たに提案する。

［2］ 流出予測の概要　気象・流出システムは，次のように状態空間法によってモデル化されていると仮定する。

気象システム：　$a_{k+1}=\phi(t_k,a_k)+\alpha_k$,　(1a)　　$r(t)=\psi(t_k,a_k)+\beta_k,\ t_k<t\leq t_{k+1}$,　(1b)

流出システム：　$dx(t)/dt=f(t,x(t),r(t))+w(t)$,　(2a)　　$y_k=g(t_k,x(t_k))+v_k$　(2b)

ただし，a_kは時刻t_kでの気象システムの状態ベクトル，$r(t)$は時刻tの降雨強度，α_k, β_kは平均0の攪乱項，$x(t)$は時刻tでの流出システムの状態ベクトル，y_kは時刻t_kの流出流量，$w(t)$，v_kは平均0の攪乱項，ϕ,ψ,f,gは既知関数である。攪乱項は相互に独立で，時間的に白色な正規過程をなすものとする。

よりよい予測をするには，現在の状態をよりよく知ること＝フィルタリングが必要である。過去の降雨は既知となっているから，両システムのフィルタリングは個別にできる。

しかし、予測にあたっては，両システムを統合して考える必要があり、統合したシステムの状態ベクトル $X(t)=[a(t)^T, r(t), x(t)^T]^T$ を導入する。ただし，$a(t)$は$t_k<t\leq t_{k+1}$でa_kと定める。そうすると，$X(t)$の推移は，時刻t_kから時刻t_{k+}へ離散的に推移する部分と，$t_k<t\leq t_{k+1}$の間で連続時間で推移する部分の2つの部分よりなる。$X(t)$の定義と(1)，(2)式より，前者の部分では，$X(t_{k+})$を$X(t_k)$で表わす推移式が，後者の部分では$dX(t)/dt$を$X(t)$で表わす式が得られる。筆者らの従来の研究では，$r(t)$を統合システムの状態量に入れていないが，この"余分な"量を追加することによって，離散時間で定義された攪乱項と連続時間で定義された攪乱項が状態方程式の中に同時に存在することが無くなるので，平均値，共分散行列の予測式の誘導が簡明となる利点がある。

［3］ 攪乱項の統計的パラメータの推定　攪乱項を除いた場合の(1)，(2)式のようなモデルは動的システムを記述するのによく用いられており，特に既存の流出モデルの大半は状態ベクトルを適当に選べばこの型となる。(2)式は，これらの決定論的モデルに，モデル誤差を補償する攪乱項を陽に付加して，確率過程論的モデルに変換したものと考えられる。

実流域への適用にあたっては，モデルパラメータの決定と付加された攪乱項の統計的パラメータの決定が必要である。前者については，モデルパラメータを状態量に組みこみ，その時間微分を0とする状態方程式を追加するという方策をとるとよい。ここでは後者の

Sugioka Atsushi , Takasao Takuma, Shiiba Michiharu, Norikyo Masahiro, Takara Kaoru

問題を考える。そのために，まず，次のような離散時間の線形システムを考える。

$$x_{k+1} = \Phi_k x_k + w_k, \quad (3a) \qquad y_{k+1} = H_{k+1} x_{k+1} + v_{k+1}. \quad (3b)$$

ただし，x_kは時刻t_kでの状態ベクトル，y_{k+1}はスカラーの観測値であり，Φ_k, H_{k+1}は適当な次数をもつ非確率行列，w_k, v_{k+1}は互いに独立，時間的に白色の平均値0の正規確率変数またはベクトルであって，$E[w_k w_k^T] = \lambda G_k$，$E[v_k v_k^T] = V_k$とする。このとき，$\lambda>0$を未知パラメータとして，これを逐次推定していく方法を考える。紙数の都合で結論だけを述べる。時刻t_kまでのλの推定値を$\hat{\lambda}_k$，その推定誤差の分散を$P_\lambda(k)$と表わすことにし，観測値y_{k+1}が得られると，

$$\lambda_{k+1} = [\{y_{k+1} - H_{k+1}\hat{x}(k+1|k)\}^2 - H_{k+1}\Phi_k P_x(k|k)\Phi_k^T H_{k+1}^T - V_{k+1}] / (H_{k+1} G_k H_{k+1}^T) \quad (4)$$

としてλの推定値λ_{k+1}を求め，最初$\zeta_0 = \hat{\lambda}_k$とおいて，$l = 1, 2, \cdots$について，

$$Z_l = 2[H_{k+1}\{\Phi_k P_x(k|k)\Phi_k^T + \max\{0, \zeta_{l-1}\} G_k\} H_{k+1}^T]^2 / (H_{k+1} G_k H_{k+1}^T)^2 \quad (5a)$$

$$\zeta_l = (\hat{\lambda}_k / P_\lambda(k) + \lambda_{k+1} / Z_l) / (1/P_\lambda(k) + 1/Z_l) \quad (5b)$$

なる計算を反復し，得られる系列$\{\zeta_0, \zeta_1, \cdots, \zeta_l\}$が収束したと判定されたら，

$$\hat{\lambda}_{k+1} = \zeta_l, \quad (6a) \qquad P_\lambda(k+1) = P_\lambda(k) Z_l / (P_\lambda(k) + Z_l) \quad (6b)$$

とおく。ただし，(4),(5)式中の$\hat{x}(k+1|k)$，$P_x(k|k)$はそれぞれ時刻t_kまでの観測情報によるx_{k+1}の条件つき期待値，x_kの条件つき共分散行列である。$\hat{x}(k+1|k+1)$，$P_x(k+1|k+1)$の計算をするときには，$\lambda = \hat{\lambda}_{k+1}$と仮定していく。もとにもどって，(2a)式中の$w(t)$について，$E[w(t)w(\tau)] = \lambda G(t)\delta(t-\tau)$とし，$\lambda$が未知パラメータの場合を考えると，準線形化によって(2)式は(3)式の形に変換されるから，上述の方法が適用できる。

[4] 適用例　気象システムモデルとして簡単なランダムウォークモデルを，流出システムモデルとして非線形貯水池モデルを考え，猪子石流域(27km²)の出水を予測(1時間後予測)した例をFig.1に示す。Fig.2は予測残差とその標準偏差の予測値を示す。

[5] 今後の課題　他の適用例もあわせて検討すると，予測残差に持続性が認められ，撹乱項が白色であるとする仮定が成立しない可能性を示している。今後，撹乱項が有色の場合をも考慮した予測方式を検討していく予定である。

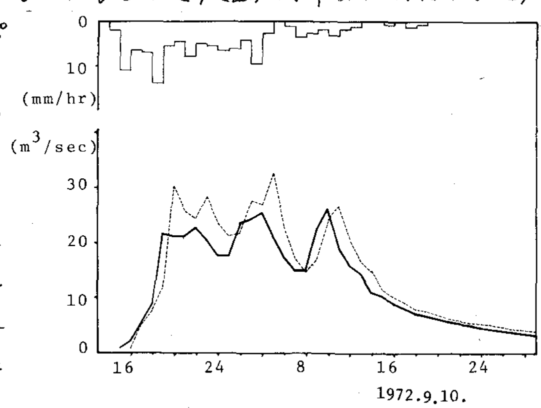

Fig.1

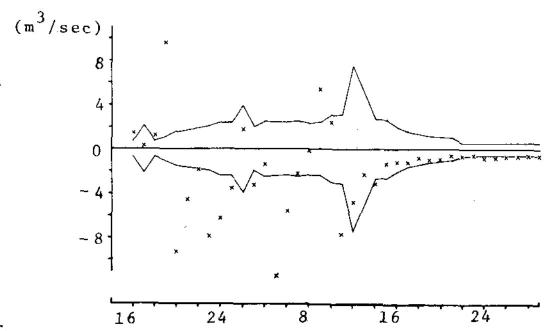

Fig.2

1) 高棹琢馬・椎葉充晴：流出システムのフィルタリングと予測，第16回自然災害科学総合シンポジウム概要集，pp.133−136.