

ポアソン分布とガンマ分布を組み合わせた 降水量の確率分布モデルの適合性

近畿大学 理工学部 正員 江藤 剛治
近畿大学 理工学部 正員 ○西村 克己

1. まえがき

降水量の確率分布は、周知のとおり非対称形であり、これまでピアソンⅢ型(ガンマ分布)、対数正規型等の分布が適合するとされてきた。これらの中で、3パラメータ・ガンマ分布(超ガンマ分布)が、降水量の分布にもっともよく適合するという報告もある。

降水量および降水事象の発生の物理的な機構について考えてみると、降水量・降水事象ともにランダム現象となっている。上記の各分布式には、このような機構は考慮されていない。そこで、本報告では、降水事象の発生も確率分布するものとし、これにポアソン分布を、また、降水量分布にはガンマ分布を仮定し、この両者を組み合わせた分布(以後これを仮に、ポアソン・ガンマ分布と呼ぶ)を日降水量分布に適用し、その適合性の検討を行う。

2. 確率密度関数

降水量分布には、取り扱い等の便利さから、次に示す2パラメータ・ガンマ分布がよく用いられる

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \quad \text{----- (1)}$$

ここで、 α : 形状母数、 β : 尺度母数、 x : 降水量

つぎに、ガンマ分布より複雑となるが、降水量分布に対して適合性がよいと言われている3パラメータ・ガンマ分布を示す。

$$f(x; \alpha, \beta, \nu) = \{\beta^\alpha \alpha / \Gamma(\nu \alpha)\} \exp(-\beta x^\alpha) x^{\nu-1} \quad \text{----- (2)}$$

ここで、 α, β, ν : 定数、 x : 降水量

(2)式で、 $\alpha = 1$ のとき(1)式と同一の式となる。

つづいて、降水事象のランダム性を考慮したポアソン・ガンマ分布を示す。

$$f(x; \alpha, \beta, \lambda) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^v}{v!} \cdot \frac{\beta^{\alpha v}}{\Gamma(\alpha v)} \cdot x^{\alpha v-1} \cdot e^{-\beta x} \quad \text{----- (3)}$$

ここで、 α, β : ガンマ分布における形状母数、尺度母数、 λ : 単位時間内の降水事象の平均生起回数、 v : 単位時間内の降水事象の生起回数

(3)式の $v (=1, 2, \dots, \infty)$ は、降水の生起回数が単位時間内に1回、2回…… ∞ 回であることを示し、実際の降水現象の発生回数を表わしている。このような確率密度関数は、Einsteinが(3)式のガンマ分布式を指数分布式として流砂量式を導くのに用いた。この考え方は、Todorovicによって詳細に論じられている。また Sayre, 中川・辻本らは流砂量問題に、Eagleson, 池淵らは、この考え方を降水量分布に適用している。

3. 最尤法によるあてはめ

(1), (2), (3)式の各定数の推定には、一般的に積率法、最尤法があるが、ここではすべて
Takeharu Eto, Katsumi Nishimura

最尤法により行った。以下に、ポアソン・ガンマ分布の尤度方程式を示す。ただし、 $t(x; \alpha, \beta, \lambda) = \sum_{i=1}^x H(i; \alpha, \beta, \lambda)$ とおく。 n は、降水資料数とする。

$$\sum_{i=1}^n \{ \sum_{j=1}^i (H_{ij}^{(1)}) \} = 0, \sum_{i=1}^n \{ \sum_{j=1}^i (H_{ij}^{(2)}) \} = 0, \sum_{i=1}^n \{ \sum_{j=1}^i (H_{ij}^{(3)}) \} = 0 \dots (4)$$

(ガンマ分布, 超ガンマ分布の尤度方程式は、文献リ参照)

4. 計算例および考察

計算に使用した降水資料は、大阪の70年間(1901~1970)の日降水量資料である。降水資料の中には、降水は観測されたが測定できない0.0mm/day降水が非常に数多く含まれている。この降水は無視することはできないが、最尤法による定数推定の計算不可能になるので、降水量にはすべて0.0mm/dayを加えた。最尤法により月別に計算したポアソン・ガンマ分布の定数 α, β, λ を表-1に示す。

図-1に、1月の日降水量と(1), (2), (3)の分布式との非超過確率の比較を示している。ガンマ分布, 超ガンマ分布もあわせて示している。ただし、超ガンマ分布の定数 α, β, λ は、尤度方程式をNewton-Raphson法により計算したが、解は収束しなかった。そこで、最尤法は尤度関数を最大とする方法であるので、その方針にもとづいて解を探索したが、解が収束しなかったため計算を途中で打ち切り、その値によって非超過確率を求めて図に示している。

つぎに、ポアソン・ガンマ分布およびガンマ分布と日降水量分布との χ^2 分布による適合度の検計を行う。結果を表-2に示す。ただし、有意水準は5%とした。この結果では、3月, 11月において、ポアソン・ガンマ分布は適合、ガンマ分布は棄却されている。また、1, 2, 4, 12月は、いずれの分布も棄却されている。この点に関して、表-3には各月の1mm/day未満, 5mm/day未満の降水日数の降水条件付きでの出現率を示している。これによると、4月を除く棄却された月は、1mm/day未満の降水日数出現率が55%以上、5mm/day未満が75%以上であり、非常に小さい降水量の発生確率が高い。

ポアソン分布とガンマ分布を組み合わせることによって、降水事象発生のランダム性を考慮した分布が、日降水量に対して、従来のガンマ分布よりは適合度が高いことが確かめられた。

〔参考文献〕

1) 鈴木栄一：気象統計学，地人書館

表-1 ポアソン・ガンマ分布の定数

月	定数	α	β	λ
1		0.098	0.101	2.915
2		0.100	0.099	2.981
3		0.113	0.072	3.365
4		0.121	0.059	3.905
5		0.129	0.057	3.798
6		0.129	0.041	3.627
7		0.109	0.036	3.223
8		0.105	0.043	3.042
9		0.116	0.042	3.376
10		0.116	0.046	3.451
11		0.120	0.072	3.363
12		0.105	0.095	3.096

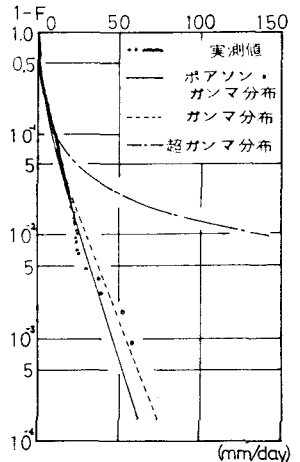


図-1 非超過確率

表-2 適合度検定の結果

月	分布	
	ガンマ分布	ポアソン・ガンマ分布
1	X	X
2	X	X
3	X	O
4	X	X
5	O	O
6	O	O
7	O	O
8	O	O
9	O	O
10	O	O
11	X	O
12	X	X

表-3 降水事象出現率

月	降水型	1mm/day未満	5mm/day未満
1		63.4	80.3
2		59.6	77.1
3		45.9	66.9
4		36.0	56.2
5		33.7	56.6
6		31.1	52.6
7		42.5	60.7
8		48.0	69.3
9		39.1	60.5
10		39.3	59.8
11		43.8	66.2
12		56.5	77.1

(%)