

自己回帰モデルによるスペクトル解析に関する一考察

大阪大学工学部 正員 室田 明
 大阪大学工学部 正員 中辻 啓二
 大阪大学大学院 学生員 角谷 孝義

1. まえがき ; 点計測により抽出した有限のデータを用いて、対象とする物理現象の周波数特性を正確に把握するには、分解能が高く、且つ安定度の良いスペクトル推定法を適用する必要がある。この目的に適した推定法として自己回帰過程を用いた方法(ARM)および最大エントロピー法(MEM)が挙げられるが、両法ともに時系列を定常ランダム過程に従うと仮定した上で成立する。本文では、ARMを実測の時系列に適用する際の妥当性について検討するとともに、基本特性について考察を行なう。

2. 基本原理 ; 自己回帰過程に基づいたA.R.モデルは過去の時点の値に対する関係を考慮したもので、現時点 t での値から1つ前の時点 $t-1$ での値の影響を引きざると、あとはこれらの値と無相関な $\varepsilon(t)$ しか残らないというマルコフ性を拡張したモデルである。すなわち M 次まで拡張した場合、現時点での値 $u(t)$ は過去における値 $u(t-1)$, $u(t-2)$, ..., $u(t-M+1)$ の線型結合 $\hat{u}(t)$ で推定でき、平均二乗誤差 $\overline{\varepsilon^2(s)} = (u(t) - \hat{u}(t))^2$ は既知の自己相関関数および線型予測係数の関数として表わされる。 $\overline{\varepsilon^2(s)}$ が最小となるように線型予測係数 $\hat{u}(m)$ を決定すれば、スペクトル密度関数 $\varphi(f; \Delta t)$ は次式で表わされる。

$$\varphi(f; \Delta t) = \sigma^2 \Delta t / \left| 1 - \sum_{m=1}^M \hat{u}(m) \exp(-i2\pi f m \Delta t) \right|^2 \quad \text{ここに、} \sigma^2 \text{は誤差} \varepsilon(s) \text{の分散を示す。}$$

このスペクトル推定法を実際に用いるにあたり問題となるのは、『何次の次数のA.R.モデルを用いるべきか』と、『行列式をいかなるアルゴリズムで解くか』の二点である。前者に関しては、低次数の場合は分解能が悪く、また高次数の場合はスペクトルの分散が増大し精度が悪くなることが一般に知られている。そこで、両法の兼ね合いを考慮した次数決定の示標としてFinal Prediction ErrorがAkaike¹⁾により考案され、FPEを最小とする次数が適切であると考えられている。

なお、同法を情報理論におけるエントロピー最大²⁾の概念に基づくMEM²⁾と比較すれば、原理そのものは全く異なっているが、最終的には両法ともに同型の行列方程式を解いて線型予測係数を求めることになり、両法の等価性については証明されている。³⁾

3. 合成時系列への適用例 ; 図-1に示す対象時系列 $|X(t)| = \left| \sum_{n=1}^N a_n \cos \omega_n t + \text{random} \right|$ への適用を試みた。ここに絶対値を用いたのは、歪度が高く間歇性を有した時系列の模倣を行なったためである。なお、スペクトル計算の過程に含まれる行列方程式はBurgの考案したアルゴリズムにより計算を行なった。これは得られた時系列を情報の全てとみなし線型予測係数を決定すると同時に、自己相関関数を順次漸化関係式により推定する方法である。図-2(a)~(c)は

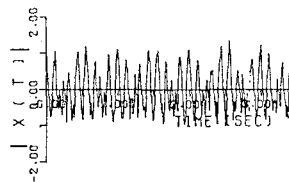


図-1 対象時系列

MUROTA, Akira, NAKATSUJI, Keiji and KAKUTANI, Takayoshi

次数を10, 25, 40に選んだ場合の推定された自己相関関数を示し、図-3(a)~(c)は対応するスペクトル密度関数を示す。図-2(a)において自己相関関数は減衰する周期性を示している。Burg法では、時系列がA.R過程に従うと仮定して自己相関関数を推定するために、次数10の場合には回帰された線型予測係数内に1つの周期変動が強調され、推定された自己相関関数は減衰性の周期変動が現われることになる。したがって、図-3(a)にはその周期のみが現われたスペクトル形状を示している。これに比較して次数25, 40の場合のスペクトル形状は鋭いピークを有し、次数が分解能にもたらす影響が明確にわかる。図-3(d)は従来のスペクトル解析法の1つであるBlackman-Tukey法で求めたもので、ARMと比較して分解能が極端に落ちることが明瞭である。

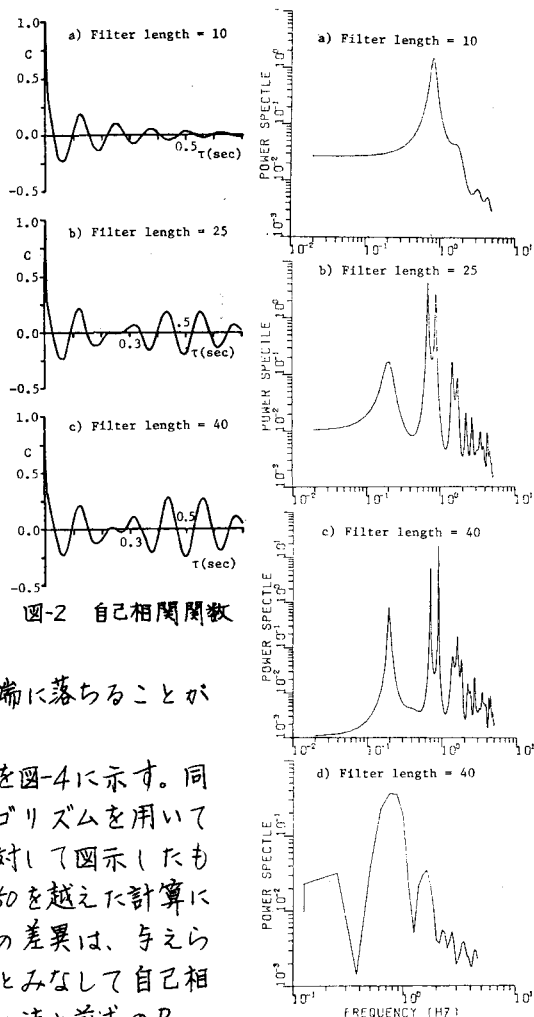


図-2 自己相関関数

図-3 スペクトル密度関数

つぎに次数とピーク値およびFPEの関係を図-4に示す。同図はBurg法およびYule-Walker法の両アルゴリズムを用いて求めたスペクトルのピーク値を次数の変化に対して図示したものである。これらを比較すれば、特に次数が50を越えた計算においては両者の差異が大きくなっている。この差異は、与えられたラグ数(=次数)以外の自己相関関数を0とみなして自己相関関数から線型予測係数を求めるYule-Walker法と前述のBurg法との違いに起因するものと推測される。しかしラグ数を“FPE最小”となる値に決定すれば、この時系列では両者による大きな差異はない。また、時系列 $X(t) = \sum_{n=1}^N a_n \cos \omega_n t + \text{random}$ の解析結果によると、Yule-Walker法においてはFPEがラグ数55前後で負となり、同時にピーク値の極端な減少が見られた。FPEは予測誤差の二乗平均であり非負でなくてはならず、この点からも次数決定の重要性とともにアルゴリズムの差異が認識される。

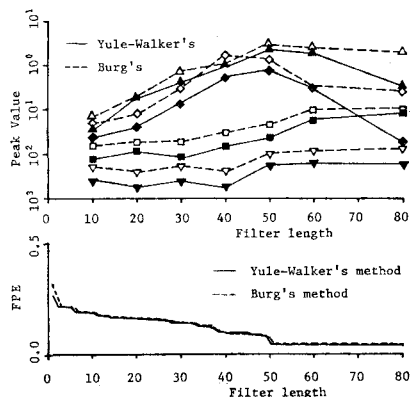


図-4 次数とピーク値およびFPEの関係

参考文献 1) Akaike, H.; Ann. Inst. Statist. Math., vol. 21, 1969.

2) 日野幹雄; スペクトル解析, 朝倉書店, 1977.

3) Ulfrych, T. J.; J. of Geophy. Res., vol. 77, 1972.