

矩形等分布加振力による2層弾性体表面の振動

兵庫 正 岡上田 深 神戸大 正 北村 泰寿
神戸大 正 桜井 春輔

1. まえがき

本文は、2層弾性体表面に矩形等分布上下加振力が作用する場合の表層表面の上下変位を求める計算法を示したものである。変位式は特異点を有する無限二重積分で表わされており、本文では複素周回積分によってこの積分を評価した。

2. 矩形等分布上下加振力による表面上下変位式

等分布加振力が調和振動 $e^{i\omega t}$ であるとき、表面の上下変位は、時間項を省略して、次のように表わされる。

$$w_0(x, y) = \frac{-g_0 a b}{\pi^2 g_1} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{G(k)}{F(k)} \cdot T(k, \theta) e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} k d\theta dk \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで, } G(k) &= -\alpha_1 k_{s1}^2 \{-D(\beta_1 \alpha_2 PR + \alpha_1 \beta_2 QS) + (APS - \alpha_1 \beta_1 BQR)\}, \\ F(k) &= 2\alpha_1 \beta_1 k^2 (\beta_1^2 + k^2) C(P^2 - Z^2 + R^2 - S^2) - \alpha_1 \beta_1 \{4k^2 A + (\beta_1^2 + k^2)^2 B\} PR + \alpha_1 \{4\beta_1^2 \alpha_2 k^2 - \beta_2 (\beta_1^2 + k^2)\} DPS \\ &\quad + \{4\alpha_1 \beta_1^2 k^2 B + (\beta_1^2 + k^2)^2 A\} QS + \beta_1 \{4\alpha_1^2 \beta_2 k^2 - \alpha_2 (\beta_1^2 + k^2)^2\} DQR, \end{aligned}$$

$$T(k, \theta) = \frac{\sin(\alpha k \cos \theta)}{\alpha k \cos \theta} \cdot \frac{\sin(\beta k \sin \theta)}{\beta k \sin \theta}, \quad k_{p2} = \frac{\omega}{V_{p2}}, \quad k_{s2} = \frac{\omega}{V_{s2}}, \quad k_{p1} = \frac{\omega}{V_{p1}}, \quad k_{s1} = \frac{\omega}{V_{s1}},$$

$$A = k^2 Z^2 - \alpha_2 \beta_2 X^2, \quad B = Y^2 - 4\alpha_2 \beta_2 k^2 M^2, \quad C = YZ - 2\alpha_2 \beta_2 MX, \quad D = XY - 2k^2 MZ,$$

$$X = 2k^2 u - (\beta_1^2 + k^2), \quad Y = (\beta_2^2 + k^2) - 2k^2, \quad Z = (\beta_1^2 + k^2)u - (\beta_2^2 + k^2), \quad M = u - 1,$$

$$P = e^{-\alpha_1 H} + e^{\alpha_1 H}, \quad Q = e^{-\alpha_1 H} - e^{\alpha_1 H}, \quad R = e^{-\beta_1 H} + e^{\beta_1 H}, \quad S = e^{-\beta_1 H} - e^{\beta_1 H},$$

$$\alpha_2^2 = k^2 - k_{p2}^2, \quad \beta_2^2 = k^2 - k_{s2}^2, \quad \alpha_1^2 = k^2 - k_{p1}^2, \quad \beta_1^2 = k^2 - k_{s1}^2, \quad u = G_2/G_1$$

また、 V_{p2} , V_{p1} はそれぞれ基層、表層における疎密波速度、 V_{s2} , V_{s1} はせん断波速度、 G_2 , G_1 はせん断弾性係数、 H は表層厚、 $2a$, $2b$ は辺長、 g_0 は加振力の振幅である。

3. 変位式の無限積分の評価

式(1)は、層のある場合のレーレイ波の分散性のため、分母の $F(k)$ は1つ以上の極を有し、解析的な方法による積分の評価は困難である。このため、Ewingらの手法に基づいて、変数 k に関する無限積分を複素周回積分によって有限分岐線積分に置き換え、最終的には k , θ に関する有限二重積分の形に帰着させて、評価を行なう。

①積分手法；変数 θ に関する積分は、被積分関数の周期性を考慮すると、積分範囲は、 $(0 \sim \pi/2)$ となる。さらに k に関する積分は、次のように $\exp$ に関して2つの項に分離する。

$$\int_0^\infty \frac{G(k)}{F(k)} \cdot T(k, \theta) e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} k dk = \int_0^\infty \frac{G(k)}{k F(k)} \sum e^{ik\theta} dk + \int_0^\infty \frac{G(k)}{k F(k)} \sum e^{-ik\theta} dk = I_1 + I_2 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで, } \sum e^{\pm ik\theta} &= \exp[\pm ik\{(x+a)\cos\theta + (y+b)\sin\theta\}] - \exp[\pm ik\{(x-a)\cos\theta + (y+b)\sin\theta\}] + \exp[\pm ik\{(x+a)\cos\theta + (y-b)\sin\theta\}] \\ &\quad + \exp[\pm ik\{(x-a)\cos\theta + (y-b)\sin\theta\}] - \exp[\pm ik\{(x+a)\cos\theta - (y-b)\sin\theta\}] - \exp[\pm ik\{(x-a)\cos\theta - (y-b)\sin\theta\}] \\ &\quad - \exp[\pm ik\{(x+a)\cos\theta - (y+b)\sin\theta\}] + \exp[\pm ik\{(x-a)\cos\theta - (y+b)\sin\theta\}] \end{aligned}$$

Kiyoshi Fujita, Yasutoshi Kitamura, Shunsuke Sakurai

いま、変数 k を複素変数 $k = k + i\tau$ と置き換えて、積分を複素領域で行なう。ところで、 $\alpha_\ell, \beta_\ell (\ell=1, 2)$ はそれぞれ分岐点 $k_{p\ell}, k_{s\ell} (\ell=1, 2)$ を持つ二価関数であり、全部で 8 葉のリーマン面がある。一般に、多価関数の複素積分における問題となるのは、1 価関数に直す当たり、どのようなリーマン面を採るかということである。ここでは、波動の無限深さの条件を考慮し、Ewing らの手法に従い、図に示すようは、 $\text{Re}[\alpha_\ell, \beta_\ell] > 0 (\ell=1, 2)$ なる面を選択した。

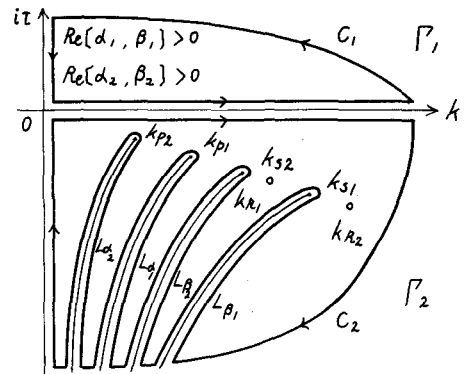


図 積分経路

さらに、分岐点および極を第 4 象限内にとり、 $\text{Re}[\alpha_\ell] = \text{Re}[\beta_\ell] = 0 (\ell=1, 2)$ なる分岐線を導入した。積分 I_1 に対しては周回積分路 Γ_1 、積分 I_2 に対しては Γ_2 を対応させ、それぞれの積分路について Cauchy の定理を適用すると、式(2)は次のように書き直される。なお、無限遠経路 C_1, C_2 に沿った積分からの寄分はない。

$$I_1 + I_2 = - \int_{-\infty}^0 \frac{G(i\tau)}{iF(i\tau)} \sum e^{-i\tau\Theta} d\tau - \int_0^{\infty} \frac{G(\zeta)}{\zeta F(\zeta)} \sum e^{-\zeta\Theta} d\zeta - \int_{-\infty}^0 \frac{G(i\tau)}{iF(i\tau)} \sum e^{\tau\Theta} d\tau - 2\pi i \text{Res}, \quad (3)$$

ここで、 $L = L_{p1} + L_{p2} + L_{s1} + L_{s2}$

1) 分岐線積分；図に示す分岐線積分路は、分岐点を実軸上に戻す操作により、直線積分になる。このとき、積分路に沿った $\alpha_\ell, \beta_\ell (\ell=1, 2)$ の符号の変化に注意し、経路、後路に相互の積分が打ち消し合うことを考慮すれば、分岐線積分は次のようになる。

$$\begin{aligned} \int_L \frac{G(\zeta)}{\zeta F(\zeta)} \sum e^{-\zeta\Theta} d\zeta = & \left\{ \int_{-\infty}^0 \left[\frac{G(i\tau, \alpha_\ell, \beta_\ell)}{iF(i\tau, \alpha_\ell, \beta_\ell)} - \frac{G(i\tau, -\alpha_\ell, -\beta_\ell)}{iF(i\tau, -\alpha_\ell, -\beta_\ell)} \right] \sum e^{-i\tau\Theta} d\tau \right. \\ & \left. + \int_0^{k_{s2}} \left[\frac{G(k, \alpha_\ell, \beta_\ell)}{kF(k, \alpha_\ell, \beta_\ell)} - \frac{G(k, -\alpha_\ell, -\beta_\ell)}{kF(k, -\alpha_\ell, -\beta_\ell)} \right] \sum e^{-ik\Theta} dk, (\ell=1, 2) \right\} \quad (4) \end{aligned}$$

ここで、 $G(k, i\alpha_\ell, i\beta_\ell)$ は $G(k)$ 中の $\alpha_\ell, \beta_\ell (\ell=1, 2)$ の符号が正、または負であることを示す。

2) 留数部；分母 $F(k)$ が n 個の根を持つとき、留数項は次のように表わされる。

$$2\pi i \text{Res} = 2\pi i \sum_{s=1}^n \left\{ \frac{G(k_{rs})}{k_{rs} F'(k_{rs})} \sum e^{-ik_{rs}\Theta} \right\}, \quad F'(k) = \frac{dF}{dk} \quad (5)$$

式(4), (5)を式(3)に代入すれば、式(1)の評価式とし、最終的に次式を得る。

$$\begin{aligned} w_3(x, y) = & \frac{48ab}{\pi^2 G_1} \int_0^{y/2} \left\{ 2\text{Re} \left[\int_0^{\infty} \frac{G(i\tau)}{iF(i\tau)} \sum e^{-i\tau\Theta} d\tau \right] + \left[\int_0^{k_{s2}} \frac{G(k, \alpha_\ell, \beta_\ell)}{kF(k, \alpha_\ell, \beta_\ell)} - \frac{G(k, -\alpha_\ell, -\beta_\ell)}{kF(k, -\alpha_\ell, -\beta_\ell)} \right] \sum e^{-ik\Theta} dk \right. \\ & \left. - 2\pi i \sum_{s=1}^n \left\{ \frac{G(k_{rs})}{k_{rs} F'(k_{rs})} \sum e^{-ik_{rs}\Theta} \right\}, (\ell=1, 2) \right\} \quad (6) \end{aligned}$$

なお、式(6)においては、無限積分の項が残っているが、 $\exp$ の係数によって積分値の収束は早く、この項の評価は難しくない。

本文では、紙面の都合上計算結果については省略したので、講演時にこれらの詳細について報告する。

参考文献 W. M. Ewing, et al. : Elastic Waves in Layered Media, McGraw-Hill, 1957.