幾何学的非線形性の影響を考慮した材料非線形問題の効率化に関する研究

京都大学工学部　正員　丹羽義次
京都大学工学部　正員　渡辺英一
関　西　電　力　正員○景山　学

1．はじめに

非線形問題の数値解析においては，一般に多大の計算時間，記憶領域を必要とし，解析上の労力は多大なものとなる。特に，非線形剛性行列の作成，逆行列演算においてそうである。そこで物理モデルの簡易化や，Static Condensation，つまり消去，繰返し演算による低次元化，さらに，系の固有値解析によって得られる固有関数行列などの適当な変換行列を用いた線形座標変換，すなわちAffine変換を行い，解析上の簡易化を行った。

本研究は構造物の弾塑性解析の効率化を主目的としたものであるが，弾塑性問題と幾何学的非線形問題は，実際の現象として密接な関係にあるものであるから，定式化を行ううえで幾何学的非線形性を考慮した。しかし，いわゆる静的分岐座屈現象は対象とせず，もっと現実的な初期不整を考慮した耐荷力に言及した。

2．基礎事項

(i)　ひずみ－変位の関係

u_i，w_iをそれぞれ面内，面外の変位とし，ε_iをひずみ，w_k^Iを初期たわみ成分とすると

$$\varepsilon_i = B_{ik}^{P} u_k + B_{ik\ell}^{BB}\left(w_k^I + \frac{1}{2} w_k\right) w_\ell + B_{ik}^{B} w_k \qquad (1)$$

さて，物理モデルの簡易化において，節点自由度の減少を目的として，面外変位に関する変位関数として不整合なものを用いたため，要素間に曲げバネを設けた。結局(1)式の曲げの項は，この曲げバネにおいて考慮されるものである。

(ii)　構成式

弾性状態の構成式を$d\sigma_i = D_{ij}^{e} d\varepsilon_j$と書くと，降伏関数を$F = F(\sigma_j)$とし，$F_{,j} = \partial F / \partial \sigma_j$とすれば，塑性応力ひずみ行列$D_{ij}^{P}$は

$$D_{ij}^{P} = D_{ij}^{e} - D_{i\ell}^{e} D_{jm}^{e} F_{,\ell} F_{,m} / \left(H' + D_{kn}^{e} F_{,k} F_{,n}\right) \qquad (2)$$

と書ける。ここでH'はひずみ硬化の勾配である。また降伏関数Fとしては，面内応力と曲げ応力の双方を考慮して簡易化モデルに対し導かれたvon Misesの条件式を用いた。

(iii)　つりあい式

仮想変位の原理よりれ元のglobalなつりあい式が得られるが，この非線形連立方程式を摂動法を用いて線形化すると，次式が得られる。

$$\lambda^{(1)}\begin{Bmatrix} P_i^{0} \\ Q_i^{0} \end{Bmatrix} = [K_{ij}]\begin{Bmatrix} u_j^{(1)} \\ w_j^{(1)} \end{Bmatrix}, \quad \lambda^{(2)}\begin{Bmatrix} P_i^{0} \\ Q_i^{0} \end{Bmatrix} = [K_{ij}]\begin{Bmatrix} u_j^{(2)} \\ w_j^{(2)} \end{Bmatrix} + \{P_i^{(2)}\} \qquad (3)$$

ここに，下添字0を現段階を表わすとし，

$$[K_{ij}] = \left[\begin{array}{c:c} K_{ij}^{P} & K_{ijk}^{PB} w_{k0} \\ \hdashline K_{jik}^{PB} w_{k0} & K_{ij}^{B} + K_{kij}^{PB} u_{k0}^{E} + \frac{1}{2} K_{ijk\ell}^{BB}\left(3 w_{k0} w_{\ell 0} - w_k^I w_\ell^I\right) \end{array}\right]$$

$$\{P_i^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} K_{ijk}^{PB} w_j^{(1)} w_k^{(1)} \\ K_{kij}^{PB} u_k^{(1)} w_j^{(1)} + \frac{3}{2} K_{ijk\ell}^{BB} w_j^{(1)} w_k^{(1)} w_{\ell 0} \end{Bmatrix}$$

である。

さて，構造モデルの簡易化により，剛性行列K_{ijk}^{PB}, $K_{ijk\ell}^{BB}$らの要素数は著しく減少する。そのため，各ステップごとに剛性行列を組み立てる非線形問題においては，この部分の演算時間は大幅に短縮され，かつ逆行列演算における効率化も図られる。

KAGEYAMA, Manabu　　NIWA, Yoshiji　　WATANABE, Eiichi

3．数学的低次元化

(3)式をさらに数学的に低次元化する。

(i) Static Condensation

(3)式において，式表現を簡単化するため

$$[K_{ij}]=\begin{bmatrix}K^{PP}_{ij} & K^{PB}_{ij}\\ K^{BP}_{ij} & K^{BB}_{ij}\end{bmatrix},\quad \mathcal{F}^{(i)}\begin{Bmatrix}P_i^0\\ Q_i^0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}P_{io}^{(i)}\\ Q_{io}^{(i)}\end{Bmatrix}$$

とすると，(3)式の才1式は次のように，面内変位を消去することにより，面外自由度の次元(S)にまで低次元化できる。

$$(Q_{io}^{(i)}-K^{BP}_{im}K^{PP^{-1}}_{nm}P^{(i)}_{no})=(K^{BB}_{ij}-K^{BP}_{im}K^{PP^{-1}}_{nm}K^{PB}_{nj})\,w_j^{(i)} \qquad (4)$$

才2式に対しても同様である。この手法はK_{ij}行列の大きさが非常に大きな場合に有用である。

(ii) Mathematical Condensation

一般に系の標準的な固有値問題を解き，その固有関数行列を$\Phi_{ij}\left(\begin{smallmatrix}i=1,\cdots,S\\ j=1,\cdots,t\end{smallmatrix},\ S\gg t\right)$とする。そこで変換$w_j=\Phi_{jk}V_k$を施し，像空間に変換すれば，(4)式に対してさらに低次元化された式が得られる。しかし，矩形板の弾塑性問題においては必らずしも固有値解析を必要としないので，変換行列として二重三角級数を用いる。結局，(4)式は次式に変換されることになる。

$$\Phi_{ik}^{T}(Q_{io}^{(i)}-K^{BP}_{im}K^{PP^{-1}}_{nm}P^{(i)}_{no}) = \Phi_{ik}^{T}(K^{BB}_{ij}-K^{BP}_{im}K^{PP^{-1}}_{nm}K^{PB}_{nj})\,\Phi_{jk}V_k^{(i)} \qquad (5)$$

(5)式は面外自由度よりさらに低次元化された方程式であり，適当な変換行列を決定することができるならば，解の精度は非常によく，逆行列演算は容易なものとなる。

4．数値解析例

数値計算例としては，中心圧縮柱，面内圧縮を受ける板などを考えた。解析の効率化の結果として，面外等分布荷重を受ける板についてTable－1に示した。左欄が構造モデルの簡易化のみの場合，右欄がさらに数学的低次元化を施した場合の演算時間である。数学的低次元化を施した場合，付帯的な行列演算が必要となるが，次元がNLにまで低次元化されているため，逆行列演算が非常に容易になる。結局，ステップごとの演算時間は減少することになる。また，Fig. 1，2にそれぞれ中心圧縮柱，面内圧縮板について荷重たわみ曲線を示した。面内圧縮板は載荷辺を直線に保ち，非載荷辺は側方に面内拘束されている。Fig. 3はこの圧縮板の塑性化進行図であり，モデルの特徴から離散的に示されている。面内せん断を受ける板などの結果については当日発表させていただく。

Table－1 演算時間

Condition	S E M HE Compiler		Condensation HE Compiler	
	1step あたり CPU(MSEC)	逆行列演算 CPU(MSEC)	1step あたり CPU(MSEC)	逆行列演算 CPU(MSEC)
全辺固定				
4x4 (D.O.F.=39, NL=4)	286	66	233	29
5x5 (D.O.F.=64, NL=9)	508	267	444	98
6x6 (D.O.F.=95, NL=9)	1127	887	888	268
全辺単純支持				
4x4 (D.O.F.=39, NL=4)	290	67	210	26
5x5 (D.O.F.=64, NL=9)	528	269	419	88
6x6 (D.O.F.=95, NL=9)	1122	822	839	242

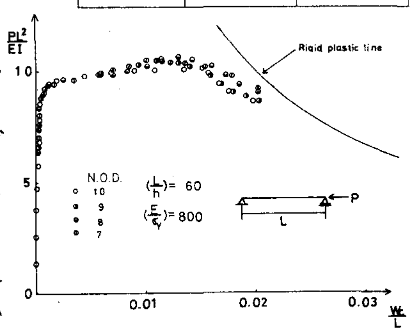

Fig. －1 荷重たわみ曲線

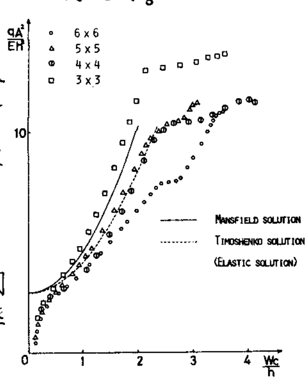

Fig. －2 荷重たわみ曲線

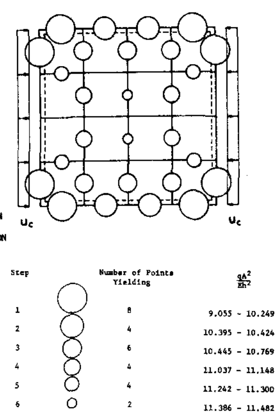

Fig. －3 塑性化進行図