

有限帯板法による薄板の有限変位解析

大阪大学 工学部 正会員 前田 幸雄
長岡技術科学大学 正会員 林 正
大阪大学 大学院 学生員 森 寛司

1. まえがき

有限帯板法⁽¹⁾は、薄板のような単純な形状と境界条件を有する構造の解析には極めて効率的な解法であり、線形解析には数多くの解析例がある。しかし、非線形解析に適用した例⁽²⁾は少なく、これらの計算例においても数値計算では数値積分の手法が用いられているため計算時間が長く、有限帯板法の最大の長所である計算の効率がとこなわれている。

そこで、本研究では有限帯板法の解式を解析的に定式化し、さらに、変位関数に改良を加えて有限変位解析を効率よく、かつ、高精度に解析できる有限帯板法を定式化した。このとき、有限帯板法では移動座標を用いることが困難であるので2次の非線形項まで用いる必要がある。

2. 変位関数

解析仮定は従来の有限帯板法と同じであるが、節線の自由度は帯板要素間のひずみの連続性を考慮して x, y, z 軸方向の変位 u, v, w とその y に関する微係数

$$\varphi = \partial u / \partial y, \quad \psi = \partial v / \partial y, \quad \theta = \partial w / \partial y \quad (1)$$

の6自由度とする。これらを x 軸に関して級数展開したときの各展開項の係数を一般化変位と呼ぶ。この一般化変位を帯板要素についてベクトル表示すれば、第 m 項の成分は次のように表れる。

$$d_m = \{ u_m, \varphi_m, v_m, \psi_m, w_m, \theta_m, w_{jm}, \theta_{jm} \}^T \quad (2)$$

この式(2)を用いて帯板要素の中央面の変位を表示すれば、次式のようになる⁽³⁾。

$$u = f_1^T \sum Q_m d_m, \quad v = f_2^T \sum V_m d_m, \quad w = f_3^T \sum W_m d_m \quad (3)$$

ここに、 f_1, f_2, f_3 は y 軸方向の形状関数であり、 y の多項式を要素とする12次の列ベクトルである。また、 Q_m, V_m, W_m は変位の級数展開に用いた展開関数の第 m 項である。

展開関数 Q_m, V_m, W_m は帯板要素の両端で単純支持の境界条件を満足するよう次式で与える。

$$Q_m = \cos(m\pi x/l), \quad V_m = W_m = \sin(m\pi x/l) \quad (m=1, 2, \dots) \quad (4), (5)$$

上式のような展開関数のみを用いると要素の両端($x=0, l$)でつねに $v=w=0$ となる。また、 x 軸方向の直ひずみの線形成分 $\partial u / \partial x$ もつねに零となる。これらの解析上の矛盾点を改良するため第0項の展開関数として次の関数を式(4), (5)に付け加えて用いる。

$$Q_0 = 1 - 2(x/l), \quad V_0 = W_0 = 1 \quad (6), (7)$$

さらに、面内に荷重を受ける場合について x 軸方向変位 u の展開関数として式(4)の代わりに文献2)で用いられている次の関数も検討した。

$$Q_m = \sin(2m\pi x/l)$$

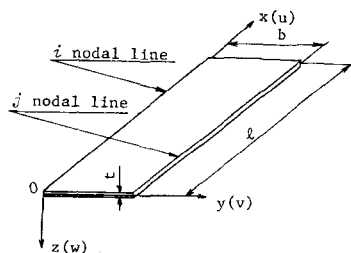


図-1 帯板要素

3. 剛性行列

Kirchhoffの仮定より、帯板要素の任意点のひずみは中央面の変位 u, v, w と初期変位 w_0 を用いれば、 u, w の非線形項を考慮し次式で表わされる。

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial (v+2w^2)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial (w+2w^2)}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial (v+2w^2)}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial (w+2w^2)}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial (v+2w^2)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial (v+2w^2)}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial (w+2w^2)}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial (w+2w^2)}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

この式(9)に式(3)を代入するとひずみの3成分は次式のように表わすことができる。

$$\varepsilon_i = \sum_m \{ \alpha_{im}^T + \frac{1}{2} \sum_k \{ d_k + 2d_k^2 \}^T [E_{imk}] \} \alpha_{im} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (10)$$

ここに、 d_k は一般化変位で表わされた初期変位であり、 α_{im}, E_{imk} は座標のみの関数である。

仮想仕事の原理を用いて帯板要素の平衡方程式を誘導し、得られた剛性行列 K_{mn} を線形の剛性行列 $K_{mn}^{(0)}$ と変位に関して1次、2次の非線形剛性行列 $K_{mn}^{(1)}, K_{mn}^{(2)}$ に分けて次に示す。

$$K_{mn} = K_{mn}^{(0)} + K_{mn}^{(1)} + K_{mn}^{(2)} \quad (11) \quad K_{mn}^{(0)} = \sum_i \sum_j D_{ij} \int_V \{ \alpha_{im} \alpha_{jn} \} dV \quad (12)$$

$$K_{mn}^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j D_{ij} \int_V \sum_k \{ \alpha_{im} \{ d_k + 2d_k^2 \}^T [E_{jnk}] + [E_{ikn}] \{ d_k + 2d_k^2 \} \alpha_{jn} + (\alpha_{jn}^T d_k) [E_{imn}] \} dV \quad (13)$$

$$K_{mn}^{(2)} = \frac{1}{4} \sum_i \sum_j D_{ij} \int_V \sum_k \sum_l \{ [E_{ikn}] \{ d_k + 2d_k^2 \} \{ d_l + 2d_l^2 \}^T [E_{jnl}] + (d_k^T [E_{jkl}] \{ d_l + 2d_l^2 \}) [E_{imn}] \} dV \quad (14)$$

ここに、 D_{ij} は弾性マトリックスの (i, j) 成分を示す。これらの剛性行列は、いずれも2次の正方行列であり、添字 m, n は一般化変位の第 m, n 展開項に対応する。

4. 数値計算例

面内圧縮荷重を受ける4辺単純支持の正方形板について帯板要素を1枚、展開項を3項とし(計算した結果を図-2に示す。

図中の印は x 軸方向変位 u の展開関数として式(4)を用いた場合であり、●印は式(8)を用いた場合である。いずれも変位に関しては級数解⁴⁾とよく一致しているが、応力に関しては式(8)の方が良い結果を与えている。破線は式(6), (7)の第0項の展開関数を無視した場合であり誤差を生じている。

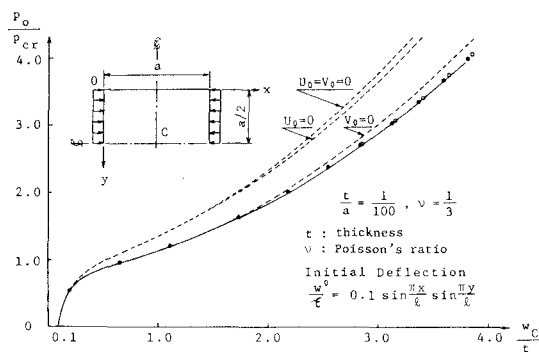


図-2 面内圧縮荷重を受ける4辺単純支持の正方形板

以上の計算結果より、本解析法は薄板の有限変位解析を効率よく計算することができ、改良された変位関数は精度のよい解析を行なうために有効である。さらに、本解析法は、箱桁などの薄肉構造物に適用することも容易である。

1) Cheung, Y.K.: Finite Strip Method in Structural Analysis, The Pergamon Press, New York, 1976. 2) 上田, 他: 有限帯板法による板および桁の弾塑性たわみ解析, JSSC 第9回マトリクス構造解析法研究発表論文集, 1975. 3) 前田, 他: 局所モードを用いた有限帯板法, JSSC 第13回マトリクス解析法研究発表論文集, 1979. 4) Yamaki, N: Postbuckling Behavior of Rectangular Plates With Small Initial Curvature Loaded in Edge Compression, Journal of Appl. Mech. vol.26, 1959.