

構造物のカタストロフィーに関する数値計算

京都大学大学院 学生員 〇 勇 秀憲

京都大学工学部 正 員 円羽 義次

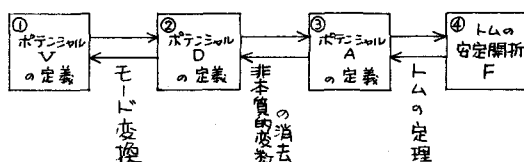
京都大学工学部 正 員 渡辺 英一

1. まえがき

筆者らは、簡単な2自由度系および多自由度系について有限要素法と簡易化要素法によって定式化し、その安定性を数値計算により論じた。^{1), 2)}

本報告では、一般の多自由度系にカタストロフィー理論を適用し数値解析する際に、それが位相幾何学的に如何なる意味をもっているのか検討するものである。

2. 離散化手法・モード変換法



① ポテンシャル V の定義

離散化された系のポテンシャル V は、

$$V: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^K \longrightarrow \mathbb{R}$$

ここに、 $\mathbb{R}^N$ は系の一般化座標 $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N)$ を変数とする状態空間、 $\mathbb{R}^K$ は系の荷重パラメータ・初期不整パラメータ $p = (p_1, \dots, p_K)$ を変数とするコントロール空間である。

このとき、系の平衡空間 M_V は、

$$M_V = \{(\omega, p) \mid \frac{\partial V}{\partial \omega_i}(\omega, p) = 0 \ (i=1, \dots, N)\} \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^K$$

さらに、 M_V 上の特異点で起こるカタストロフィーは、その点近傍のカタストロフィー写像

$$\chi_V: M_V \longrightarrow \mathbb{R}^K$$

による $\mathbb{R}^K$ 上の「分岐集合」によって示される。

② ポテンシャル D の定義

V のまきで系のカタストロフィーを把握することはその自由度 N, K が大きいので非常に複雑で困難である。そこで $V_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial \omega_i \partial \omega_j}$ を対角化する線形変換(モード変換)、

$$h_1: \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N \text{ or } h_1: \omega = (\omega_1, \dots, \omega_N) \mapsto \tilde{\omega} = (\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_N)$$

と、類似の変換、

$$h_2: \mathbb{R}^K \longrightarrow \mathbb{R}^K \text{ or } h_2: c = (c_1, \dots, c_K) \mapsto p = (p_1, \dots, p_K)$$

を用いて新しいポテンシャル D を定義する。

$$D: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$$

ここで、 h_1 で用いる変換行列としては、不安定現象(飛移・分岐座屈)を与える固有値問題 $\det |V_{ij}| = 0$ から得られる固有ベクトル行列を使う。自由度の低減をはかるため、 $1 \leq n \ll N$ とする。また、 h_2 で用いる変換は、荷重パラメータについては平行移動(恒等変換、初期不整パラメータについては(4)と同様の固有ベクトル行列を用い、 $1 \leq k \ll K$ とする。

平衡空間を M_D とするときカタストロフィー写像は、

$$\chi_D: M_D \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

③ ポテンシャル A の定義

m 個 ($1 \leq m \leq n$) の不安定現象が同時に起こるとき、対角化された $D_{ij} = \frac{\partial^2 D}{\partial \tilde{\omega}_i \partial \tilde{\omega}_j}$ は m 重複の固有値問題 $\det |D_{ij}| = 0$ を与える。つまり、

$$D_{ii} = 0 \ (i=1, \dots, m), \quad D_{\alpha\alpha} = 0 \ (\alpha=m+1, \dots, n)$$

このとき $(n-m)$ 個の平衡方程式 $D_\alpha = 0$ から $(n-m)$ 個の未知数 u_α を求めると、

$$u_\alpha = u_\alpha(\tilde{\omega}_i, c) \ (i=1, \dots, m; \alpha=m+1, \dots, n)$$

の形が定まり、いま C を固定すると、写像

$$\psi_C: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ or } \psi_C: V=(v_1, \dots, v_n) \mapsto z=(z_1, \dots, z_n)$$

が定義される。また、 $1 \leq l \leq k, 1 \leq l \leq 4$ となる l に対して写像 $\Phi: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$ を

$$\Phi_0(C_1, \dots, C_k) = \Phi(C_1, \dots, C_k, 0, \dots, 0)$$

として定めれば恒等変換、

$$\Phi_0: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l \text{ or } \Phi_0: C=(C_1, \dots, C_k) \mapsto C=(C_1, \dots, C_k)$$

が定義される。やえに新しいポテンシヤル B は、 $B: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ として決まる。さらに拡張されたモーアの定理³⁾から、 B は次の形に展開できる。

$$B(z_1, \dots, z_n) = A(z_1, \dots, z_m) + \sum_{\alpha=m+1}^n \pm z_\alpha^2$$

ここに $A(z_1, \dots, z_m)$ は変数 $z_1, \dots, z_m$ から成る次数以上の多項式である。上の式の二次形式はカタストロフィーに無関係であるので変数 $z_\alpha = v_\alpha$ ($\alpha=m+1, \dots, n$) を「非本質的変数」、また変数 $z_i = v_i$ ($i=1, \dots, m$) を「本質的変数」と呼ぶ。

こうしてポテンシヤル A が定義される。

$$A: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$$

また、平衡空間を M_A とするとカタストロフィー写像は、

$$\chi_A: M_A \rightarrow \mathbb{R}^l$$

④ トムの安定開折 F

A は $1 \leq m \leq 2, 1 \leq l \leq 4$ のとき定義され、変換、

$$g_1: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad g_2: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l$$

によって有名な7つの初等カタストロフィーの安定開折 F のいずれかに変換される。

3. 微分位相同型写像

2.で記したことを図式的に示すと以下のようである。

$$\begin{array}{ccccccc} M_V \xrightarrow{(R_1, R_2)} M_D \xrightarrow{(V, \Phi_0)} M_B \xrightarrow{\text{モーアの定理}} M_A \xrightarrow{(g_1, g_2)} M_F \\ \chi_V \downarrow \quad \chi_D \downarrow \quad \chi_B \downarrow \quad \chi_A \downarrow \quad \chi_F \downarrow \\ \mathbb{R}^k \xrightarrow{R_2} \mathbb{R}^k \xrightarrow{\Phi_0} \mathbb{R}^l \xrightarrow{I} \mathbb{R}^l \xrightarrow{g_2} \mathbb{R}^l \end{array}$$

各ポテンシヤル V, D, B, A, F の間の変換、 $R_1, R_2, V, \Phi_0, g_1, g_2$ 等が「微分位相同型写像」であれば、 V, D, B, A, F はすべて「同値」であり、さ

らに各カタストロフィー写像 $\chi_V, \chi_D, \chi_B, \chi_A, \chi_F$ も「同値」である。やえに、多自由度系のカタストロフィー特性(χ_V によって把握される)は、不安定現象に本質的にかかめる変数のみで表わされた少自由度系のカタストロフィー特性(χ_A や χ_F による)に置き換えて認識することができる。

4. 数値計算例

詳しくは当日スライドで発表する予定であるが、ここでは微分位相同型写像 g_1, g_2 の具体的な形の一例を示す。

固有値問題 $\det |D_{ij}| = \det |K_{ij}^0 - \Lambda K_{ij}^1| = 0$ (K_{ij}^0, K_{ij}^1 は定数、 Λ は荷重パラメータ)において、不安定現象が単独に起こる($m=1$)場合を考える。不安定現象を示す本質的変数を v_1 、対応する初期不整パラメータを ε_1 とする。7つの安定開折のうち構造物に顕著な「折り目」と「くさび」について、 g_1 と g_2 の具体的な形は以下の通りである。

$$\begin{array}{ll} \text{「折り目」} & (g_1, g_2) \\ F(z, \lambda, \varepsilon) = \frac{\alpha_1}{3} z^3 + \frac{\lambda}{2} z^2 + \varepsilon z & \begin{cases} z = v_1 + \varepsilon_1 \\ \lambda = (\Lambda_{cr} - \Lambda) \tilde{K}_{11}^0 \\ \varepsilon = -\tilde{K}_{11}^0 \varepsilon_1 = -\Lambda_{cr} \tilde{K}_{11}^0 \varepsilon_1 \end{cases} \\ \alpha_1 = \text{constant} & \\ \text{「くさび」} & (g_1, g_2) \\ F(z, \lambda, \varepsilon) = \frac{\alpha_2}{4} z^4 + \frac{\lambda}{2} z^2 + \varepsilon z & \begin{cases} z = v_1 + \varepsilon_1 \\ \lambda = (\Lambda_{cr} - \Lambda) \tilde{K}_{11}^0 \\ \varepsilon = -\tilde{K}_{11}^0 \varepsilon_1 = -\Lambda_{cr} \tilde{K}_{11}^0 \varepsilon_1 \end{cases} \\ \alpha_2 = \text{constant} & \end{array}$$

なお、ここで Λ_{cr} は最低次の不安定現象を示す荷重パラメータの値である。

また、同時座屈($m=2$)については当日発表する。

5. 参考文献

- 1) 奥井・渡辺, 土木構造物のカタストロフィーに関する2,3の考察, 第34回土木学会年次学術講演講演概要集, I-31, 1979.
- 2) 奥井・渡辺, 構造物の荷重力とカタストロフィーに関する数値計算, 第29回応用力学連合講演論文抄録集, A97, 1979.
- 3) 野口・福田, 初等カタストロフィー, 数論208, 1976.