

波動方程式の一数值解析

大阪工業大学 正員 岡村宏一
建設省土木研究所 正員 足立義雄
東洋技研コンサルタント 正員 ○島田 功

1. まえがき：騒音を防止あるいは軽減する対策としては、発音源での対策、伝播経路での対策、受音側の対策に分類されるが、ここでは、その伝播経路に関連する音響放射の一数值解析結果について報告する。振動物体から放射される音の伝播の問題を扱うには、物体表面の法線方向の振動速度が、物体表面での垂直方向の空気の擾乱速度に等しいとする境界条件のもとで波動方程式を解くことが必要になる。波動方程式の数値解法には、しばしば差分法が用いられる。本報告でも、振動平板からの音の伝播を上記の境界条件を用い差分法によって追跡した。ところで、差分法では、解析領域が有限となり、地面等のような境界が与えられる場合には問題はないが、無限遠へ領域が広がっている場合には、無限遠へ放射する条件を境界に与える必要がある。本解析では、このような条件を与えるため、発音源から十分離れた位置での音波は、その近傍で一様な進行波と考え、音波が外へ伝わる条件を無限遠へ放射する境界に与えて解析した。

2. 解法の要点：波動方程式は、力の釣合条件、媒質の連続条件、媒質の圧力-密度の関係より導かれ、速度ポテンシャル ϕ を導入すると

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad \text{----- (1)}$$

ただし、 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 、 c は波動の伝播速度となり、空気の密度を ρ [kg/m^3]、 x, y, z 方向の速度成分をそれぞれ $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$ [m/s]、静止の状態(大気の状態)からの圧力の増分を δp [N/m^2] とすれば、それらの諸量は、

$$\dot{u} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \dot{v} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \dot{w} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \delta p = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{----- (2)}$$

とあらわすことができる。(1) 式を差分式におきかえると、

$$c(\Delta t)^2 \left\{ \frac{1}{(\Delta x)^2} (\phi_{ax} - 2\phi_0 + \phi_{ax}) + \frac{1}{(\Delta y)^2} (\phi_{ay} - 2\phi_0 + \phi_{ay}) + \frac{1}{(\Delta z)^2} (\phi_{az} - 2\phi_0 + \phi_{az}) \right\} = \phi_0(t-\Delta t) - 2\phi_0 + \phi_0(t+\Delta t) \quad \text{--- (3)}$$

となり、図-2 の差分スキームに示すように、○印の ϕ の値から ●印の ϕ の値が求められる。初期条件としては、 $t=0$ のときの ϕ 、および $\dot{u} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$ の各値より、 $\phi(-\Delta t)$ の値を仮想し(3) 式より t が Δt だけ進んだ ϕ の値を求めることができ、順次 Δt ずつ進め必要な時刻まで追跡することができる。次に境界条件として、振動面では与えられた振動速度になるように、(2) 式を用い振動面の ϕ を決定する。一方、解析領域の境界では境界条件に対応して領域の外部に ϕ の分布を仮想し、無限に広がっているかのようにして扱う。特に無限遠へ領域が広がっているが解析上境界を設けなければならない場合、この境界は音源から十

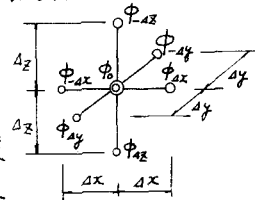


図-1 差分キント

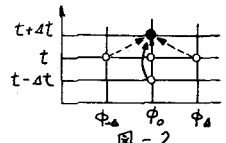


図-2

分離れているものと仮定し、この近傍での波は無限度の方向に進む進行波 ($\phi = F(ct - s)$) とすれば、図-5 に示すように境界から Δs だけ離れた点の $\phi(t)$ は、 t 時間 ($t = \Delta s/c$) 前における境界の値 ($\phi_0(t - \tau)$) が伝播したものと考えられる。

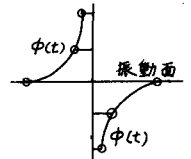


図-3

3. 数値解析；図-6 に示す板が上下に振動する場合の音圧放射について解析した。振動面の長手方向 (y 方向) には空気の移動がないものとし、 $x-z$ 面の 2 次元問題として行った。数値計算の諸元は表-1 のとおりであり振動面の速度は図-8 (b) のような正弦波で与えた。図-7 は解析に用いた差分ネットである。差分ネット (a) (b) による差、および差分ネット (a) における時間増分量 Δt による収束について図-8 に示した。収束条件に対する時間増分量 $\Delta T \leq 0.0041$ 秒 ($\Delta s/\sqrt{2}c$)、 Δs ：差分間隔 となり、2 次元の場合の収束条件と一致する。また分割ネット (a), (b) の差の最大は約 6% であり、分割ネット (a) で実用上十分であると思われる。

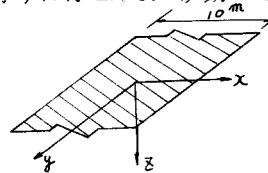


図-6 振動平板

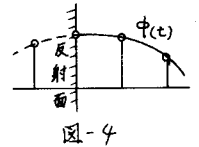


図-4

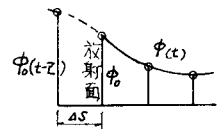


図-5

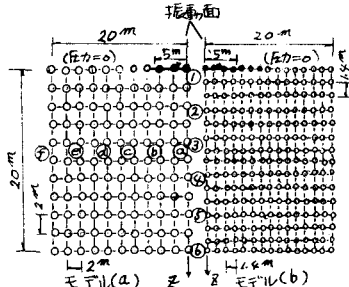


図-7 差分ネットモデル(1/4領域)

表-1 計算の諸元

空気の密度 (ρ_0)	1.20 kg/m^3
伝播速度 (c)	344 m/s
振動数 (f)	5 Hz
振動速度の最大値	1 cm/sec

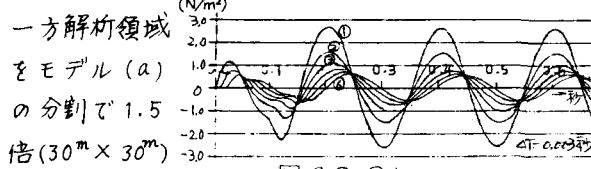


図-9 ①~⑥ 点の圧力履歴

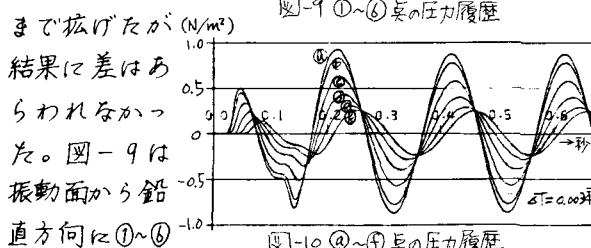


図-10 ①~⑥ 点の圧力履歴

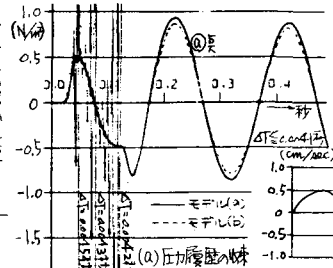


図-8 ①~⑥ 点の圧力履歴および平板の振動速度

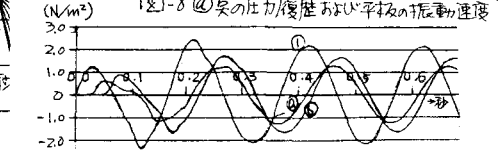


図-11 反射も考慮して、①、②、⑥ 点の圧力履歴

まで広げたが結果に差はあらわれなかった。図-9 は振動面から鉛直方向に①~⑥の点の音圧履歴を、図-10 は振動面下 10 m のところの②~⑥ 点の音圧履歴を示したもので振動面の音圧に比し、鉛直方向に 10 m および 20 m 離れるとそれぞれ約 $1/3$, $1/5$ に減衰する。一方水平方向には、② 点の音圧に比し、 10 m および 20 m 離れると、それぞれ約 $1/3$, $1/5$ に減衰する結果となった。図-11 は、図-7 (a) の差分ネットを振動面の上面にも設け、振動面下 20 m のところで反射の効果を考慮した場合の①、②、⑥の点の音圧履歴を示したもので、反射波の影響により地表面に相当する⑥点では、反射を考慮しない場合の3倍もの音圧を示した。

佐藤泰男：弾性波動論，岩波書店，1978