浮板構造の有限水深波による弾性応答

大阪市大　正員○小林治俊　　大阪市大　正員　園田恵一郎
大阪市大 大学院　川口和也

1 まえがき　有限水深波と弾性浮体の相互作用に関する研究は，Garrison[1]による浅い吃水の無限長円柱のGreen関数を用いた解析以外，現在のところ見当らないようである。一方，有限水深波と剛浮体の相互作用については Blackら[2]，井島ら[3]などの研究があり，その中で井島らの定式化が最も直截的でしかも適用性が広いものと思われる。本研究は井島らの手法を応用，拡張し有限長の弾性浮体の弾性応答を厳密な境界値問題として取扱うものである。

2 速度ポテンシャル

本研究では図1に示された弾性浮体の2次元平面波による弾性応答を取扱い，流体は非圧縮，非粘性の微小振幅波とし弾性浮体は両端自由な梁と見なす。図の様に $x=\pm l$，$z=-gh$ によって分けられる領域(1)(2)(3)における速度ポテンシャルを $\Phi_k(x,z,t)$ $(k=1,2,3)$ とし波の周波数を σ とすれば $\Phi_k=\phi_k(x,z)e^{i\sigma t}$ （$i=\sqrt{-1}$，t＝時間）で ϕ_k はラプラスの方程式(1)を満足せねばならない。

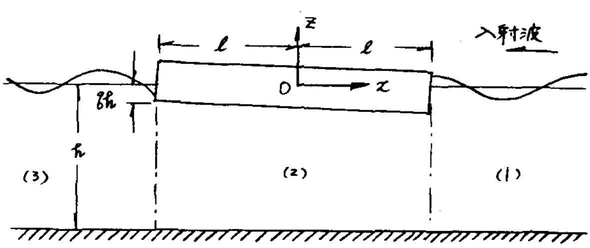

図-1

$$\Delta\phi_k=0 \quad \text{——(1)}$$

次に各領域の速度ポテンシャルを決定する。

(a) 領域(1)及び(3)　ϕ_1，ϕ_3 に対する自由表面と水底条件は g＝重力の加速度とすると，

$$\partial\phi/\partial z=\sigma^2\phi/g \quad (z=0) \quad \text{——(2)} \qquad \partial\phi/\partial z=0 \quad \text{——(3)}$$

式(2)(3)を満足し更に式(1)と $x=\pm\infty$ での放射条件を満足する解は次式で与えられる。

$$\phi_1=\left\{Ae^{ik(x-l)}+Be^{-ik(x-l)}\right\}\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}+\sum_{m=1}^{\infty}C_m e^{-k_m(x-l)}\frac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h} \quad \text{——(4)}$$

$$\phi_3=Je^{ik(x+l)}\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}+\sum_{m=1}^{\infty}L_m e^{k_m(x+l)}\frac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h} \quad \text{——(5)}$$

ここに A＝入射波，B＝反射波，J＝通過波，C_m, L_m＝散乱波で k, k_m は次式の根（固有値）。

$$kh\tanh kh=-k_m h\tan k_m h=\sigma^2 h/g \quad ,(m=1,2,3,\cdots) \quad \text{——(6)}$$

(b) 領域(2)　この領域では，浮体の弾性運動に関与するものと，剛体運動に関与するものの2種の速度ポテンシャルを求めねばならない。最初に弾性運動に対する ϕ_2^e を求める。梁の横振動方程式と，流体の圧力式 p は，EI＝梁の曲げ剛性，ρ_p，ρ＝梁の単位長さ当りの密度，水の密度とすると，$EI\,\partial^4 w/\partial x^4+\rho_p\,\partial^2 w/\partial t^2=p$ ——(7)　$p=-\rho\,\partial\Phi_2^e/\partial t-\rho g w$ ——(8)

w＝梁のたわみ。梁と流体との運動学的条件は $\partial w/\partial t=\partial\Phi_2^e/\partial z$ ——(9)

式(7)(8)(9)より ϕ_2^e の満足すべき方程式　$EI\,\partial^5\phi_2^e/\partial x^4\partial z-(\sigma^2\rho_p-\rho g)\,\partial\phi_2^e/\partial z-\rho\sigma^2\phi_2^e=0$ ——(10)　を得る。式(10)と水底条件(3)式を満たす式(1)の解として ϕ_2^e は式(11)で与えられ，k'，k_m' は式(12)より決まる固有値である。

○ Harutoshi Kobayashi , Keiichiro Sonoda and Kazuya Kawaguchi

$$\phi_2^e=\left(D\frac{\cos k'x}{\cos k'l}+E\frac{\sin k'x}{\sin k'l}\right)\frac{\cosh k'(z+h)}{\cosh \bar{g}k'h}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(F_n\frac{\cosh k_n'x}{\cosh k_n'l}+G_n\frac{\sinh k_n'x}{\sinh k_n'l}\right)\frac{\cos k_n'(z+h)}{\cos \bar{g}k_n'h} \quad \text{—— (11)}$$

ここに $\bar{g}=1-g$

$$\left.\begin{aligned} k'h\tanh \bar{g}k'h &= (\sigma^2h/g)/\{EI(k'h)^4/\rho g h^4-(\rho_p/\rho h)\sigma^2h/g+1\} \\ -k_n'h\tan \bar{g}k_n'h &= (\sigma^2h/g)/\{EI(k_n'h)^4/\rho g h^4-(\rho_p/\rho h)\sigma^2h/g+1\}\end{aligned}\right\} \quad \text{—— (12)}$$

次に剛体運動によるものを求めるため，浮体の重心の静止位置を $(0,\bar{z}_0)$ とし静止位置からの浮体重心の水平，鉛直変位と回転角の複素振幅を夫々 ξ,η,ω とすれば浮体の重心運動は，

$$x_0=\xi e^{i\sigma t}\ ,\quad z_0=\bar{z}_0+\eta e^{i\sigma t}\ ,\quad \delta=\omega e^{i\sigma t} \quad \text{—— (13)}$$

と表わされるので浮体の下面の鉛直変位は，$\eta=-gh+(\eta+\omega x)e^{i\sigma t}$ —— (14) となる。従って浮体の剛体運動に関する速度ポテンシャル ϕ_2^R に対する条件式は

$$\partial\phi_2^R/\partial z=i\sigma(\eta+\omega x)\quad (z=-gh) \text{ —— (15)} \qquad \partial\phi_2^R/\partial z=0\quad (z=-h) \text{ —— (16)}$$

式(15)(16)を満たす式(1)の解は $R=r\pi/gh$ として次式で与えられる。

$$\phi_2^R=\sum_{r=0}^{\infty}\left(H_r\frac{\cosh Rx}{\cosh Rl}+I_r\frac{\sinh Rx}{\sinh Rl}\right)\cos R(z+gh)+\frac{i\sigma}{2gh}\left\{\eta\left[(z+h)^2-x^2\right]+\omega x\left[(z+h)^2-\frac{1}{3}x^2\right]\right\} \quad \text{—— (17)}$$

よって，領域(2)の速度ポテンシャルは，$\phi_2=\phi_2^e+\phi_2^R$ —— (18)

3 浮体の運動方程式

(a) 弾性運動 梁のたわみを，両端自由な梁の固有関数 $X_m(x)$ で展開すると $w=\sum_m W_m X_m(x)e^{i\sigma t}$ (19) 式(7)(8)に代入し X_m の直交性を利用すれば未定定数 W_m が得られるが，更に式(9)をも満足せねばならないので式(9)の両辺に $X_m(x)$ を掛け再度直交性を利用すると次の条件式を得る。$DQ_m^{(1)}+EQ_m^{(2)}+\sum_n(F_nQ_{mn}^{(1)}+G_nQ_{mn}^{(2)})=0$ (20)，$Q_m^{(1)}$ 等は定数（詳細省略）

(b) 剛体運動 浮体の質量を $M(=2\rho ghl)$，重心廻りの慣性モーメントを $I(=\frac{2}{3}\rho ghl^3)$ とすれば浮体の水平，鉛直，回転に関する運動方程式は圧力式を $p_k=-\rho\,\partial\phi_k/\partial t-\rho g z$ とすると

$$M\frac{d^2x_0}{dt^2}=\int_{-gh}^{0}(p_3-p_1)dz\ ,\quad M\frac{d^2z_0}{dt^2}=\int_{-l}^{0}p_2dx-Mg\ ,\quad I\frac{d^2\delta}{dt^2}=\int_{-l}^{l}p_2xdx+\int_{-gh}^{0}(p_1-p_3)(z-\bar{z}_0)dz \quad \text{—— (21)}$$

この3式より，$\xi\eta\omega$ が速度ポテンシャルの定数係数によって表わされる。

4 流体の連続条件式

$x=\pm l$ の仮想境界において浮体の側面における運動学的条件と領域(1)と(2)，及び(2)と(3)の間の mass flux と energy flux の連続性が成立せねばならない。即ち，

$$\left.\begin{aligned} x=l\text{ で}\quad \partial\phi_1/\partial x &= i\sigma\{\xi-(z-\bar{z}_0)\}\ , && 0>z>-gh \\ &=\partial\phi_2/\partial x\ , && -gh>z>-h \qquad \phi_1=\phi_2\ ,\ -gh>z>-h\end{aligned}\right\} \text{—— (22)}$$

$$\left.\begin{aligned} x=-l\text{ で}\quad \partial\phi_3/\partial x &= i\sigma\{\xi-(z-\bar{z}_0)\}\ , && 0>z>-gh \\ &=\partial\phi_2/\partial x\ , && -gh>z>-h \qquad \phi_3=\phi_2\ ,\ -gh>z>-h\end{aligned}\right\} \text{—— (23)}$$

式(22)(23)に速度ポテンシャル(4)(5)(18)及び(21)より得られた $\xi\eta\omega$ を代入する。次に $0>z>-h$ における $\cosh k(z+h)$，$\cos k_n(z+h)$ の直交系の性質，$-gh>z>-h$ における $\cos R(z+gh)$ の直交系の性質を利用し(22)(23)式にガラーキン法を適用し，速度ポテンシャルの未定定数より成る6群の無限連立方程式を導き，式(20)と併せて7群の連立方程式とする。これを解くことにより速度ポテンシャルが決定され，その結果浮体の弾性応答が確定することになる。

5 参考文献

1) C.J. Garrison，JFM，Vol.39 pt.2　2) J.L. Black ら，JFM，Vol.46
3) 井島ら，土木学会論文報告集 No. 202