構造物の粘弾性解析における効率化について

京都大学工学部　正員　丹羽義次
京都大学工学部　正員　渡辺英一
住友金属工業　正員○和泉有祐

1．はじめに

粘弾性問題の特徴は、材料の性質が時間依存性を持っていることにある。本論文では、対応原理を適用し、ＦＥＭモデルによる線形粘弾性解析の定式化を行ない、ラプラス変換後の像空間でのつり合い式を求め、次に、数学的低次元化を行なうことにより、自由度を低減し、計算時間の短縮をはかることを目的としている。また、数値ラプラス逆変換の手法として、像空間における弾性定数の変化に着目し、変換パラメータsの値を定め、ラプラス変換の基本的性質の一つである極限値定理を利用して逆変換を行なう手法を提案し、数値解析例でその有効性を示した。

2．解析手法

等方均質な線形粘弾性体において、対応原理を適用すると、ＦＥＭモデルによる像空間でのつり合い式は(1)式になる。

$$[\bar{K}(s)]\{\bar{W}(s)\}=\{\bar{P}(s)\} \qquad \text{---(1)}$$

ただし、$\{\bar{W}(s)\}$，$\{\bar{P}(s)\}$，$[\bar{K}(s)]$は各々、一般化変位、一般化力、剛性マトリックスのラプラス変換を表わしている。

今、クリープ問題を考えると、$s-\bar{W}(s)$曲線をデータとして数値ラプラス逆変換することにより、現空間における解$\{W(t)\}$を得ることができる。しかし、この場合、一般化変位の自由度をNとすると、$[\bar{K}(s)]$は$N\times N$の次元を持つ行列となり、各sについて逆行列演算をしなければならず、大次元になるほど、多大の記憶容量と演算時間を必要とする。また、$s-\bar{W}(s)$曲線もN個与えられ、それらについて一つずつ数値ラプラス逆変換しなければならない。そこで、(2)式で定義する変換マトリックス$[\Phi]$を導入することによって、自由度の低減をはかる。

$$\{W(t)\}=[\Phi]\{V(t)\} \qquad \text{---(2)}$$

(2)式をラプラス変換したものを(1)式に代入し、左から$[\Phi]^T$をかけると(3)式になる。

$$[\bar{K}^*(s)]\{\bar{V}(s)\}=\{\bar{P}^*(s)\} \qquad \text{---(3)}$$

ここに、$[\bar{K}^*(s)]=[\Phi]^T[\bar{K}(s)][\Phi]$

$$\{\bar{P}^*(s)\}=[\Phi]^T\{\bar{P}(s)\}$$

$\{\bar{V}(s)\}$をm元のベクトルとすると、像空間でのつり合い式は、N元のベクトル$\{\bar{W}(s)\}$から、m元のベクトル$\{\bar{V}(s)\}$に変換されたことになり、$[\bar{K}^*(s)]$は$m\times m$の次元を持つ行列であり、mを小さくとれば、逆行列演算が非常に容易になる。さらに、$s-\bar{V}(s)$曲線もm個だけなので、数値ラプラス逆変換をm回行なえばよいことになり、演算時間の短縮に大きな効果がある。

$[\Phi]$の要素としては、普通、適切な固有値問題を解き、固有値の小さい順にm個の固有モードを採用するが、本論文では二重三角級数で与えた。

IZUMI, Yuhsuke　　NIWA, Yoshiji　　WATANABE, Eiichi

(3)式より得られる解{$\bar{v}(s)$}は、変換パラメータsについて離散的なデータとして与えられるので、数値ラプラス逆変換によって現空間へもどさねばならない。極限値定理によると、(4)式の関係が成り立ち、

$$\lim_{s\to\infty} s\bar{v}(s) = \lim_{t\to 0} v(t)$$
$$\lim_{s\to 0} s\bar{v}(s) = \lim_{t\to\infty} v(t) \qquad \text{---(4)}$$

$v(t)$の変化の大きいtの範囲は、$s\bar{v}(s)$の変化の大きいsの範囲に対応していると考えられるので、$s\bar{v}(s)$の変化するsの範囲内に数個のs_kをとり、数値ラプラス逆変換を行なう。しかし、像空間における弾性定数$\bar{E}(s)$とポアソン比$\bar{\nu}(s)$の変化は、Fig 1のようになり、$s\bar{v}(s)$の変化と対応していることがわかった。さらに、$s\bar{v}(s)$の変化を調べるためには、sの値を0から∞まで変化させ、各sについて$[\bar{K}(s)]$の計算をしなければならないのに対して、$\bar{E}(s)$は、分割数や境界条件に依存せず、線形粘弾性体モデルを決定すれば、直ちに計算できる。したがって、本論文では、$\bar{E}(s)$の変化によって、最小二乗法に用いるべきs_kの値を決定した。

次に、これらのs_kの値に対して得られたデータ$\bar{v}(s_k)$に対して、問題の性質上、現空間での解を$v(t) = \sum a_i e^{-b_i t}$と仮定し、最小二乗法で未定係数$a_i$を決定しようとしたものが、本論文での逆変換の手法である。ここで、(4)式において、右辺は、$t=0$，$t=\infty$の時の解を表わしており、この値を数値ラプラス逆変換によって得られた解と比較することにより、解の精度を高めた。

3 数値解析例

一例として、周辺単純支持の正方形板に等分布荷重を載荷したときの、クリープ問題をとりあげる。[Φ]は項数6個の二重三角級数で与え、Fig 1の図中(1)で示される13点のs_kについて数値ラプラス逆変換し、板の中央のたわみの経時的変化をFig 2に示した。Table 1に演算時間の比較を示し、それより、数学的低次元化によって大幅に計算時間が短縮されていることがわかる。なお、数値計算は京大大型計算機センターのM200で行なった。詳細については、当日まとめて発表する予定である。

参考文献　和泉有祐：構造物の粘弾性解析における効率化に関する基礎的研究、京都大学修士論文、1980.

Table 1

F.E.M.

分割	剛性行列の要素数	演算時間 (m sec)	逆行列演算時間 (m sec)	逆行列演算時間の比率 (%)
2x2	19	429	76	17.72
4x4	59	2908	1866	64.17
6x6	123	21970	19581	89.13
8x8	211	106566	101933	95.65

Mathematical condensation

No. of modes 6

分割	剛性行列の要素数	演算時間 (m sec)	逆行列演算時間 (m sec)	逆行列演算時間の比率 (%)	FEMとの演算時間の比 (%)
4x4	36	1097	5	0.46	37.72
6x6	36	2690	5	0.19	12.24
8x8	36	5664	5	0.09	5.32

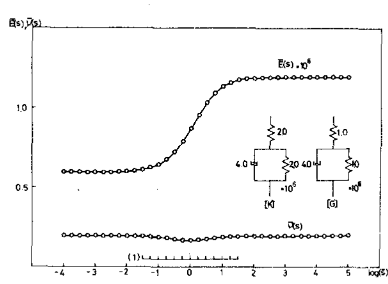

Fig 1

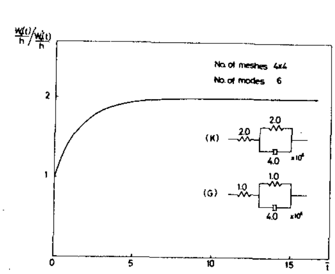

Fig 2