

半無限弾性体中に埋め込まれた棒の解析

福井大学 工学部 正員 福井 卓雄
神戸大学 大学院 学生員 O進士 正人

弾性半空間中に、その表面に垂直に異質弾性棒が埋め込まれた時、棒の一端に外力が作用した場合の棒およびその周辺の応力、および変位を解析する。

半無限弾性体中に棒が埋め込まれている場合の境界値問題 図-1

1のような半無限弾性体(弾性定数 E_{ijkl})中に、弾性棒(E_{ijkl}^B)が埋め込まれている問題は、均一な半無限弾性体中で棒の占めている領域Bに次のような仮想物体力が作用している問題と等価である。

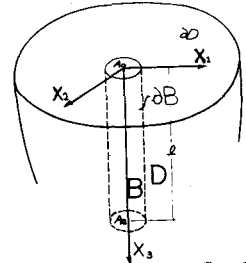


図-1

$$\begin{aligned} f_d^*(0) &= -\Theta_{d\beta}(x_n)(Q_{\beta 0} - Q_{\beta}(0)) \\ f_3^*(0) &= -\frac{1}{A}(N_0 - N(0)) - e_{3d\beta}x_{\beta}I_{d\mu}^i(M_{\mu 0} - M_{\mu}(0)) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_d^*(l) &= -\Theta_{d\beta}(x_n)Q_{\beta}(l) & f_d^*(z) &= \Theta_{d\beta}(x_n)Q_{\beta,3}(z) \\ f_3^*(l) &= -\frac{1}{A}N(l) + e_{3d\beta}x_{\beta}I_{d\mu}^iM_{\mu}(l) & f_3^*(z) &= \frac{1}{A}N_{,3}(z) + (M_{\mu,3} + e_{3\beta\mu}Q_{\beta}(z)e_{3\lambda d}I_{\lambda\mu}^i) \end{aligned} \quad (2) \quad (3)$$

ここに、 $f_d^*(0)$, $f_3^*(0)$ は領域Bの両端の断面上に、 $f_d^*(\infty)$ は領域Bにそれぞれ作用するものとする。 $N(z)$, $M_d(z)$, $Q_d(z)$ は $E_{ijkl}^* = E_{ijkl}^B - E_{ijkl}$ の仮想補剛棒で補剛されたと考えた時の仮想補剛断面の軸力、曲げモーメント、せん断力であり、 N_0 , M_{d0} , Q_{d0} はそれぞれ棒端での対応する外力を表わす。 A は棒の断面積、 $I_{d\beta}$ は断面2次モーメント、 $\Theta_{d\beta}$ は曲げを受ける弾性棒のせん断応力分布を表わす。ここで、棒の断面は2軸対称とした。

棒の軸に沿っての未知関数 N , M_d , Q_d は、仮想補剛棒との連続条件

$$N(z) = E^* \int_A \epsilon_{33}(z) dA, \quad M_d(z) = e_{3d\lambda} E^* \int_A x_{\lambda} \epsilon_{33}(z) dA, \quad Q_d(z) = 2G^* A \kappa_{d\beta} \int_A \Theta_{d\beta}(x_n) \epsilon_{3\mu}(z) dA \quad (4)$$

により決定される。ここに、 E_{ij} は半無限弾性体のひずみ、 E^* , G^* は仮想補剛棒のヤング率および、せん断弾性定数、 $\kappa_{d\beta} \equiv A \int_A \Theta_{d\lambda} \Theta_{d\beta} dA$ である。また積分は $x_3 = z$ の断面について行なう。

半無限弾性体が等方均質であり、棒の端部以外に外力が作用しない場合には、式(4)のひずみは、Mindlin解の重ね合わせにより直接求められる。この場合半無限弾性体には仮想物体力以外の物体力は存在しないので、式(4)のひずみは式(1), (2), (3)より、未知関数 N , M_d , Q_d および外力 N_0 , M_{d0} , Q_{d0} だけで表わせることになる。半径 a の丸棒の場合には、 N , M_d , Q_d について次の連立積分方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{E^*} + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E} \right) N(z) \\ \left(\frac{1}{E^*} + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E} \right) M_d(z) \\ \left(\frac{1}{GA} + \frac{d}{2\pi a^3(1+\nu)E} \right) Q_d(z) \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{8\pi(1-\nu)E} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\pi a^2} [A_0] & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{\pi a^4} \delta_{\mu\mu} [C_0] & -\frac{4}{\pi a^4} e_{3\mu} [B_0] \\ 0 & \left(\frac{4}{\pi a^4} \right)^2 e_{3\mu\rho} [F_0] & \left(\frac{4}{\pi a^4} \right)^2 \delta_{\beta\mu} \left\{ \frac{1-\nu}{32(1+\nu)} [D_0] + [E_0] \right\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_0 \\ M_{\mu 0} \\ Q_{\mu 0} \end{bmatrix} \right. \\ \left. + \int_0^z \begin{bmatrix} 4\pi \frac{\partial}{\partial s} f(z,s) & 0 & 0 \\ 0 & 8\pi \frac{\partial}{\partial s} g(z,s) \delta_{\mu\mu} & 8\pi e_{3\mu} \left\{ \frac{\partial}{\partial s} j(z,s) + \frac{1}{2}(1-\nu)h(z-s) + g(z,s) \right\} \\ 0 & \frac{4}{a^2} \left\{ \frac{1}{4}h(z-s) - \frac{\partial}{\partial s} j(z,s) \right\} & \delta_{\mu\mu} \left(\frac{4}{\pi a^4} \right)^2 \left\{ \frac{A^2(1-\nu)}{8(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial s} m(z,s) + \frac{\partial}{\partial s} k(z,s) + l(z,s) \right. \right. \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(z) \\ M_{\mu}(z) \\ Q_{\mu}(z) \end{bmatrix} ds \right. \quad (5)$$

ここに、 E 、 ν は半無限弾性体中のヤング率およびポアソン比であり、 $h(z)$ はステッジョ関数を表わす。

$$h(z) = 1 \quad (z > 0) \quad h(z) = -1 \quad (z < 0)$$

また、

$$\begin{aligned} [A_0] &= -4\pi^2 a^2 [(1-2\nu)h(z) + f(z,0)] & [B_0] &= 2\pi^2 a^4 \left[\frac{z}{4} h(z) + j(z,0) \right] & [E_0] &= 2A^2 k(z,0) \\ [C_0] &= -2A^2 \left[\frac{1}{2} h(z)(1-2\nu) + g(z,0) \right] & [D_0] &= -4\pi^2 a^6 [d h(z) + m(z,0)] & [F_0] &= 2A^2 \left[\frac{z}{4} h(z) + l(z,0) \right] \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} f(z,s) &= 2(1-2\nu)h(z-s)[R_1^{(0)}(z-s) - \frac{1}{2}] + 2(1-2\nu)^2 R_1^{(1)}(z+s) + \frac{z-s}{a} R_1^{(2)}(z-s) + [(1-4\nu)z + (3-4\nu)s] \frac{1}{a} R_1^{(3)}(z+s) \\ g(z,s) &= 2(1-\nu)h(z-s)[S_1^{(0)}(z-s) - \frac{1}{4}] + (z-s)S_1^{(1)}(z-s) + 2(1-2\nu)^2 S_1^{(1)}(z+s) + [(3-4\nu)z + (1-4\nu)s] S_1^{(2)}(z+s) \\ j(z,s) &= -S_1^{(0)}(z-s) + (z-s)h(z-s)[S_1^{(1)}(z-s) - \frac{1}{4}] + [4(1-2\nu)(1+\nu)z - (3-4\nu)s] S_1^{(0)}(z+s) \\ &\quad + [(3-4\nu)z + (1-4\nu)s] S_1^{(1)}(z+s) - 2zs S_1^{(2)}(z+s) \end{aligned}$$

$$l(z,s) = (1-2\nu)S_1^{(0)}(z-s) - (z-s)h(z-s)[S_1^{(1)}(z-s) - \frac{1}{4}] - (1-2\nu)S_1^{(2)}(z+s) + [(3+4\nu)z - s] S_1^{(1)}(z+s) + 2zs S_1^{(2)}(z+s)$$

$$k(z,s) = (z-s)S_1^{(1)}(z-s) + [(3-4\nu)z + s] S_1^{(1)}(z+s) - 2zs S_1^{(2)}(z+s)$$

$$\begin{aligned} m(z,s) &= (3+2\nu)^2 a^2 \left\{ h(z-s)[R_1^{(0)}(z-s) - \frac{1}{2}] + R_1^{(1)}(z+s) \right\} + \frac{4(3+2\nu)}{a} \left\{ h(z-s)[S_2^{(0)}(z-s) - \frac{a}{4}] + S_2^{(1)}(z+s) \right\} \\ &\quad + (3+2\nu)(1-2\nu) \left\{ h(z-s)[T_2^{(0)}(z-s) - \frac{a^2}{6}] + T_2^{(1)}(z+s) \right\} + (1-2\nu) \left\{ h(z-s)[T_1^{(0)}(z-s) - \frac{a^2}{6}] + T_1^{(1)}(z+s) \right\} \end{aligned}$$

である。

$R_1^{(n)}(t)$, $S_1^{(n)}(t)$, $S_2^{(n)}(t)$, $T_1^{(n)}(t)$, $T_2^{(n)}(t)$ は、それぞれ以下の積分で表わされ、すべて完全橋田積分によって評価できる。

$$\begin{aligned} R_1^{(n)}(t) &= a^{n-1} \int_0^\infty S^{n-2} \exp(-ts) [J_1(sa)]^2 ds & S_1^{(n)}(t) &= \int_0^\infty S^{n-2} \exp(-ts) [J_2(sa)]^2 ds \\ S_2^{(n)}(t) &= a^n \int_0^\infty S^{n-2} \exp(-ts) [aJ_1(sa) - \frac{2}{3}J_2(sa)] J_1(sa) ds \\ T_1^{(n)}(t) &= \int_0^\infty S^{n-2} \exp(-ts) [aJ_1(sa) - \frac{2}{3}J_2(sa)]^2 + [J_3(sa)]^2 ds & T_2^{(n)}(t) &= \int_0^\infty S^{n-2} \exp(-ts) [aJ_1(sa) - \frac{2}{3}J_2(sa)]^2 ds \end{aligned}$$

式(5)はFredholm型第二種積分方程式であり、その核は連続である。したがって、仮想補剛棒の部材力 N, M_d, Q_d は通常の数値的な方法により求めることができる。これらが求まれば、棒およびその周辺の応力ならびに変位を求めることは容易である。

参考文献 福井卓雄, 弾性体中の棒の解析, 第34回年次学術講演会