積分方程式法による半無限弾性問題の解析的解法

京都大学工学部　正員　小林昭一
京都大学工学部　正員　○西村直志

1　序

積分方程式法を用いた数値解析手法は広く利用されているが，本研究では，半無限弾性体の場合，積分方程式が解析的に解ける事を示し，2，3の実例を示した．

2　Green 公式の Fourier 変換

弾性学の作用素を Δ^*，応力作用素（変位から応力に変換する作用素）を Σ と書くと，Green 公式の Fourier 変換は一般に

$$\hat{\tilde{u}}_i = -\Delta^{*-1}_{ij}(i\xi)\tilde{t}_j - \Delta^{*-1}_{ij}\Sigma_{k\ell j}(i\xi)\widetilde{u_k n_\ell} - \Delta^{*-1}_{ij}(i\xi)\hat{b}_j \qquad ①$$

と書ける．ここに u，t，b，n は変位，表面力，物体力，境界での外向き単位法線ベクトルであって，$\bar{u}$ は考える領域 D 内では u，D 外では 0 と定義される関数である．また，$\hat{}$ 及び $\tilde{}$ は各々

$$\hat{\bullet} = \int_{R^3} \bullet(x)\, e^{-i\xi\cdot x} dx \ (\text{Fourier 変換}), \quad \tilde{\bullet} = \int_{\partial D} \bullet(x)\, e^{-i\xi\cdot x} dS_x \qquad ②$$

である．特に D が半空間 $x_3 > 0$ であれば，式①を用いて

$$\tilde{u}_i = -\frac{1}{\pi}\int_p \Delta^{*-1}_{ij}(i\xi)d\xi_3\,\tilde{t}_j + \frac{1}{\pi}\int_p \Delta^{*-1}_{ij}(i\xi)\Sigma_{k3j}(i\xi)d\xi_3\,\tilde{u}_k - \frac{1}{\pi}\int_p \Delta^{*-1}_{ij}(i\xi)\hat{b}_j\, d\xi_3 \qquad ③$$

なる方程式が得られる．ここに p は積分

$$-\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{R^2} e^{i\xi_\alpha x_\alpha}\left(\int_p \Delta^{*-1}_{ij}(i\xi)d\xi_3\right) d\xi_1 d\xi_2 \qquad ④$$

が $x_3 = 0$ に於ける適切な基本解を与える様に複素平面内にとった積分路である．式③は，$\tilde{u}_i$ と $\tilde{t}_i$ に関する代数方程式であって，代数演算により一方が与えられれば他方が求まる．与えられた問題の解は

$$u_i = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}^{-1}_{1,2}\left[-\int_p e^{i\xi_3 x_3}\Delta^{*-1}_{ij}(i\xi)d\xi_3\,\tilde{t}_j + \int_p e^{i\xi_3 x_3}\Delta^{*-1}_{ik}(i\xi)\Sigma_{j3k}(i\xi)d\xi_3\,\tilde{u}_j - \int_p e^{i\xi_3 x_3}\Delta^{*-1}_{ij}(i\xi)\hat{b}_j\, d\xi_3\right] \qquad ⑤$$

と書ける．ここに $\mathcal{F}^{-1}_{1,2}$ は ξ_1, ξ_2 に関する Fourier 逆変換である．

3　等方静弾性

等方静弾性の場合，Δ^*，Σ は次の様に書ける：

$$\Delta^*_{ij} = \mu\,\delta_{ij}\,\partial_k\partial_k + (\lambda+\mu)\,\partial_i\partial_j \ , \qquad ⑥$$

$$\Sigma_{i3j} = \lambda\,\delta_{i3}\,\partial_j + \mu\,(\delta_{ij}\,\partial_3 + \delta_{j3}\,\partial_i) \ . \qquad ⑦$$

Shoichi Kobayashi and Naoshi Nishimura

従って

$$\Delta^{*-1}_{ij}(i\xi) = -\frac{(\lambda+2\mu)|\xi|^2\delta_{ij} - (\lambda+\mu)\xi_i\xi_j}{\mu(\lambda+2\mu)|\xi|^4} \qquad ⑧$$

となる．この場合 P は（無限遠に於いて）主値積分の意味で $-\infty \sim \infty$ にとれば良い．例として，Mindlin 解を求めてみる．この場合

$$\hat{\sigma}_{ij} = \delta_{ij}\, e^{-ic\xi_3} \qquad ⑨$$

である．集中荷重は点 $(0,0,c)$ $(c>0)$ に於いて j 方向に作用すると仮定した．式③は，

$$\begin{pmatrix} \delta_{\alpha\beta} & -i\dfrac{\mu\xi_\alpha}{(\lambda+2\mu)\,r} \\ i\dfrac{\mu\xi_\beta}{(\lambda+2\mu)\,r} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{u}_{\beta j} \\ \tilde{u}_{3j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\delta_{\alpha\beta}}{\mu\, r} - \dfrac{(\lambda+\mu)\xi_\alpha\xi_\beta}{2\mu(\lambda+2\mu)r^3} & 0 \\ 0 & \dfrac{\lambda+3\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)\,r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{t}_{\beta j} \\ \tilde{t}_{3j} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \dfrac{\delta_{\alpha\beta}}{\mu r} - \dfrac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}\left(\dfrac{1}{r^3} + \dfrac{c}{r^2}\right)\xi_\alpha\xi_\beta & i\,\dfrac{(\lambda+\mu)c\,\xi_\alpha}{2\mu(\lambda+2\mu)\,r} \\ i\,\dfrac{(\lambda+\mu)c\,\xi_\beta}{2\mu(\lambda+2\mu)\,r} & \dfrac{\lambda+3\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)r} + \dfrac{(\lambda+\mu)c}{2\mu(\lambda+2\mu)} \end{pmatrix} e^{-rc} \qquad ⑩$$

と書けるが，$\tilde{t}=0$ とすれば，上式から $\tilde{u}$ が求められる．ここに $r=\sqrt{\xi_\alpha\xi_\alpha}$ である．さらに

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Delta^{*-1}_{ij}(i\xi)\,e^{i\xi_3 x_3}\,d\xi_3 = \begin{pmatrix} -\dfrac{\delta_{\alpha\beta}}{2\mu r} + \dfrac{\lambda+\mu}{4\mu(\lambda+2\mu)}\left(\dfrac{|x_3|}{r^2} + \dfrac{1}{r^3}\right)\xi_\alpha\xi_\beta & i\,\dfrac{(\lambda+\mu)x_3\xi_\alpha}{4\mu(\lambda+2\mu)\,r} \\ i\,\dfrac{(\lambda+\mu)x_3\,\xi_\beta}{4\mu(\lambda+2\mu)\,r} & -\dfrac{\lambda+3\mu}{4\mu(\lambda+2\mu)r} - \dfrac{(\lambda+\mu)|x_3|}{4\mu(\lambda+2\mu)} \end{pmatrix} e^{-r|x_3|} \qquad ⑪$$

,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Delta^{*-1}_{ik}\Sigma_{j3k}(i\xi)\,e^{i\xi_3 x_3}\,d\xi_3 = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{sign}(x_3)\,\delta_{\alpha\beta}}{2} - \dfrac{(\lambda+\mu)x_3\xi_\alpha\xi_\beta}{2(\lambda+2\mu)\,r} & i\left(\dfrac{\mu}{2(\lambda+2\mu)r} - \dfrac{(\lambda+\mu)|x_3|}{2(\lambda+2\mu)}\right)\xi_\alpha \\ i\left(-\dfrac{\mu}{2(\lambda+2\mu)r} - \dfrac{(\lambda+\mu)|x_3|}{2(\lambda+2\mu)}\right)\xi_\beta & \dfrac{\mathrm{sign}(x_3)}{2} + \dfrac{(\lambda+\mu)r\,x_3}{2(\lambda+2\mu)} \end{pmatrix} e^{-r|x_3|} \qquad ⑫$$

であるが，今の場合式⑨を用い，Bessel 関数に関する 2，3 の公式を用いれば，式⑤より良く知られた Mindlin 解が得られる（結果は省略）．

4　異方性（面内等方性）

等方面が x_3 軸と直交する場合，

$$\Delta^*_{\alpha\beta} = (C_{66}\partial_\gamma\partial_\gamma + C_{44}\partial_3\partial_3)\delta_{\alpha\beta} + (C_{11}-C_{66})\partial_\alpha\partial_\beta\,,\quad \Delta^*_{\alpha 3} = \Delta^*_{3\alpha} = (C_{13}+C_{44})\partial_\alpha\partial_3\,,$$

$$\Delta^*_{33} = C_{44}\partial_\gamma\partial_\gamma + C_{33}\partial_3\partial_3\,,\ \Sigma_{\alpha3\beta} = C_{44}\delta_{\alpha\beta}\partial_3\,,\ \Sigma_{\alpha33} = C_{44}\partial_\alpha\,,\ \Sigma_{33\alpha} = C_{13}\partial_\alpha\,,\ \Sigma_{333} = C_{33}\partial_3 \qquad ⑬$$

とおいて，3 と全く同様に解析ができる．

5　等方定常動弾性

$$\Delta^*_{ij} = \mu\,\delta_{ij}\,\partial_k\partial_k + (\lambda+\mu)\,\partial_i\partial_j + \rho\omega^2\delta_{ij} \qquad ⑭$$

及び式⑦を用いる．この場合 P は Radiation Condition から定まる．詳細は当日発表する．