

積分方程式法による異方性弾性体の三次元解析

京都大学工学部 正員 小林昭一

京都大学工学部 正員 西村直志

学生員 〇丸岡 剛

1. はじめに

最近、積分方程式を利用した種々の境界値・初期値問題の解析例が報告されている。今回は、この積分方程式法を三次元異方性弾性体の応力変位解析に適用した。異方性としては、横等方性弾性体を想定し、つり合い式などの基本方程式を組み合わせ、Fourier変換により、基本解を導いた。この基本解をもとに一重層ポテンシャル法により、積分方程式に定式化した。さらにこれを二、三の境界値・初期値問題に適用し、解の検討を加えた。

2. 基本解と定式化

横等方性弾性体の場合、デカルト座標系を用い応力歪関係を示す5種の弾性定数を必要とする。異方性主軸を3軸とし、以下のような関係式を今回使用した。(くり返される添え字は総和規約に従う。)

$$\begin{cases} \tau_{\alpha\beta} = ((C_{11} - 2C_{66})U_{\alpha,\alpha} + C_{13}U_{3,\beta})\delta_{\alpha\beta} + C_{66}(U_{\alpha,\beta} + U_{\beta,\alpha}) \\ \tau_{3\alpha} = \tau_{\alpha 3} = C_{44}(U_{3,\alpha} + U_{\alpha,3}) \\ \tau_{33} = C_{13}U_{\alpha,\alpha} + C_{33}U_{3,3} \end{cases} \quad (1)$$

ここで α, β は1又は2を示す。 C_{ij} :弾性定数。 $U_{\alpha,\beta}$: α 方向の変位 U の β による偏微分。

この応力歪関係式をもとに、Fourier変換を用い基本解を求める以下となる。

$$\Gamma = \frac{1}{4\pi} \left[\begin{aligned} & \left(\frac{|x_3|\delta_{\alpha\beta}}{R_i R_i^*} + \frac{\partial_i \tau_{\alpha\beta}}{R_i (R_i^*)^2} \right) C_{66} + \sum_{i=2}^3 \frac{K_i}{C_{44}} \left(\frac{\delta_{\alpha\beta}}{R_i} - \frac{\partial_i \tau_{\alpha\beta}}{R_i (R_i^*)^2} \right) \sum_{i=2}^3 \frac{L_i x_{\alpha}}{C_{44} R_i R_i^*} \text{sign}(x_3) \\ & \sum_{i=2}^3 \frac{L_i x_{\beta}}{C_{44} R_i R_i^*} \text{sign}(x_3) \quad \sum_{i=2}^3 \frac{M_i}{C_{44} R_i} \end{aligned} \right] \quad (2)$$

ここで $R_i = \sqrt{\partial_i x_{\alpha} x_{\alpha} + |x_3|^2}$, $R_i^* = R_i + |x_3|$ ($1 \leq i \leq 3$)

$K_2 = \frac{\partial_2 C_{44} - C_{33}}{C_{11}(\partial_2 - \partial_3)}$, $L_2 = \frac{(C_{13} + C_{44})\partial_2}{C_{11}(\partial_2 - \partial_3)}$, $M_2 = \frac{C_{11}\partial_2 - C_{44}}{C_{11}(\partial_2 - \partial_3)}$, K_3, L_3, M_3 は各々 ∂_2 と ∂_3 を入れ替えて求まる。

また、 $\partial_1 = C_{44}/C_{66}$, ∂_2, ∂_3 は以下の2次方程式の根として求まる。

$$\partial^2 - \frac{C_{44}^2 + C_{11}C_{33} - (C_{13} + C_{44})^2}{C_{11} \cdot C_{44}} \partial + \frac{C_{33}}{C_{11}} = 0$$

次に積分方程式1の定式化について述べる。一重層ポテンシャル法を用いると、滑りかき境界 C 上で、以下の式が成り立つ。(外部境界値問題の場合)

$$\tau_{ij} \cdot n_j = \frac{1}{2} \varphi_i + \int_C n_j \cdot G_{ij}^k \varphi_k dS \quad (3)$$

なお G_{ij}^k は k 方向に力が働いたときの基本解による応力を示す。また φ は境界上に分布する密度である。この(3)式を解くことにより、密度 φ を求め変位応力を計算する。

Shoichi KOBAYASHI Naoshi NISHIMURA Tsuyoshi MARUOKA

3. 解の検討

(3)式を数値的に解いて求まる変位・応力は今回、以下のような手法により解の検討を加えた。

1) 基本解を用い、点 (l, l, l) に大きき P 、方向 x_1 の集中荷重が働いたときの各点での応力変位を求め解析解とした。

2) Fig. A のような仮想の境界を考え、1)と同様の集中荷重が働いた時の各要素上でのTractionを求めた。なお密度 ρ は、要素 Γ で一定とした。

3) 2)で求めた値を(3)式に代入し、各要素 Γ での密度 ρ を求めた。これに基づき、各点での応力変位を求め、1)の解析解と比較検討した。

以上の方法で検討した変位・応力がFig. 1, 2である。弾性定数は以下の値とした。

C_{11}	C_{66}	C_{13}	C_{44}	C_{33}	(P/l^2)
20.0	5.0	5.0	2.5	10.0	

なお、この場合、異方性主軸に関連する弾性定数 C_{13} , C_{44} , C_{33} を等方性弾性体に比べ半分の値とした。

Fig. 1, 2 による一般に分割数が増すに比し、精度が向上する。また、変位に比べ、応力の精度が境界近傍で悪い。今後の課題点であろう。しかし、要素 Γ の密度 ρ 一定であり、境界が立方体であるような条件で、計算を簡略化したため、ある程度は、誤差はやむを得まい。なお、当日は等方性弾性体に近い条件での計算結果の検討、およびトニネリ切羽周辺での応力・変位解析結果を発表したい。

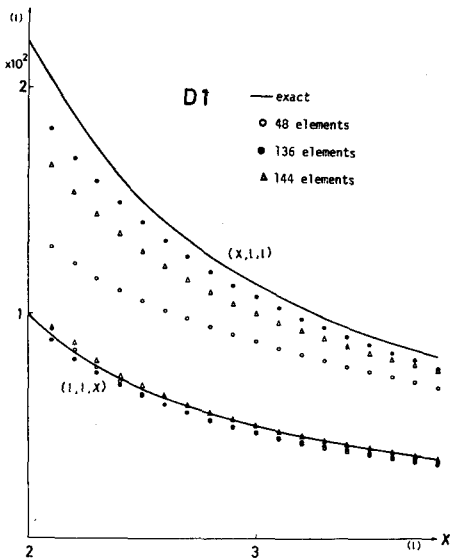
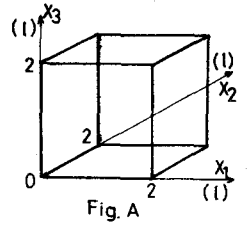


Fig. 1 $(x, l, l), (l, l, x)$ における x_1 方向の
変位 $D1$ の検討。

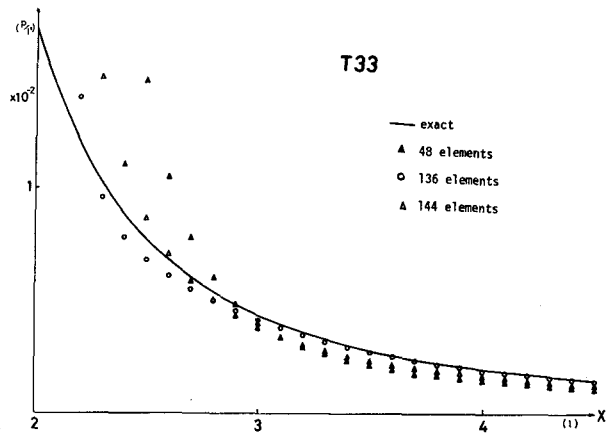


Fig. 2 (x, l, l) における T_{33} の検討。