

境界積分方程式法による3次元弾性問題の高精度化について

京都大学工学部 正員 小林昭一
 京都大学工学部 正員 西村直志
 愛知県 正員 佐守真人

1. まえがき

近年、境界積分方程式法が、3次元弾性問題にも利用されるようになったが、形状を高次近似することによって、精度の改善、検討を行なうことが意外に行なわれていなかった。そこで本研究では、外部問題に関して、形状近似に2次のアイソパラメトリック近似を用いて、解析を行なった。また、境界応力算定の方法について検討を試みた。

2. 積分方程式

領域を Ω 、その境界を $\partial\Omega$ 、領域内部の点を $p(x), q(\xi)$ 、境界上の点を $p(x), q(\xi)$ とする。

外部 Green 公式は、変位、表面力の基本解を U_{ij}, T_{ij} とすると、

$$u_i(p) = \int_{\partial\Omega} T_{ij}(p, q) u_j(q) dS(q) - \int_{\partial\Omega} U_{ij}(p, q) t_j(q) dS(q) \quad (1)$$

となる。解析可能とするために、(1)式の左辺の $p(x)$ の境界への極限をとると

$$(\delta_{ij} - C_{ij}^0) u_j(p) = \int_{\partial\Omega} T_{ij}(p, q) u_j(q) dS(q) - \int_{\partial\Omega} U_{ij}(p, q) t_j(q) dS(q) \quad (2)$$

となる。ここに C_{ij}^0 は、2重層を境界へ極限操作した時に算出される定数を示す。また内部応力は、(2)式を x で偏微分すると次式で求められる。

$$\sigma_{ijk}(p) = \int_{\partial\Omega} S_{ijk}(p, q) u_k(q) dS(q) - \int_{\partial\Omega} D_{ijk}(p, q) t_k(q) dS(q) \quad (3)$$

3. 数値解析

3.1 アイソパラメトリック要素：解の精度の向上をはかるために、図-1のような8節点をきむ2次のアイソパラメトリック要素を使用する。座標 x_i 、変位 u_i 、表面力 t_i は、

$$x_i(\xi) = M^c(\xi) x_i^c \quad u_i(\xi) = M^c(\xi) u_i^c \quad t_i(\xi) = M^c(\xi) t_i^c \quad (4)$$

と表わされる。ここに $M^c(\xi)$ は節点 c 上で1、他の節点ではゼロとなる、いわゆる形状関数である。

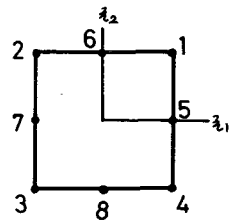


図-1

3.2 離散化：(2)式に対して、上記の2次のアイソパラメトリック近似を使用し、 N 個の要素に離散化する。さらに、数値積分として、ガウス積分を使用する。 H_c, H_m を x_1 軸、 x_2 軸方向の積分の重み、 J を Jacobian とすると(2)式は

$$C_{ij} u_j(p(x)) - \sum_{m=1}^N \sum_{c=1}^8 \sum_{\xi=1}^M u_j^{(m)} T_{ij}(p, q(M^c(\xi) \xi^{(m)})) M^c(\xi) H_c H_m J = - \sum_{m=1}^N \sum_{c=1}^8 \sum_{\xi=1}^M U_{ij}(p, q(M^c(\xi) \xi^{(m)})) M^c(\xi) H_c H_m J \quad (5)$$

と表わされる。ただし、 $C_{ij} = \delta_{ij} - C_{ij}^0$ とする。

3.3 積分の評価：(5)式は、節点 c が積分を行なう要素に含まれてない場合、可積分とな

SHOICHI KOBAYASHI, NAOSHI NISHIMURA, MAHITO SAMORI

るが、 k が要素内に含まれている時、 $T_{ij} M^k H_{kH} J \in O(r^{-1})$ 、 $U_{ij} M^k H_{kH} J \in O(1)$ となる、2重層は可積分にならない。従って図-2のように要素をさらに分割し、ガウス積分点も、線型の形状関数を導入して、三角形状とし、 $J \in O(r)$ とすることによって可積分となるようにした。節点自身での積分は、上述の方法においても可積分とまらない。そこで、下式の2重層の関係

$$C_{ij} - \int_{\Omega_D} T_{ij}(P, Q) dS(Q) = \delta_{ij} \quad (6)$$

を使用して、節点自身での積分と k の残りの積分を分離すると、

$$C_{ij} - \int_{\Omega_D} T_{ij} M^k dS = \int_{\Omega_D} T_{ij} M^{kR} dS \quad (7)$$

となる。(7)式により、節点自身の積分は、残りの可積分により、決定されることがわかる。

3.4 境界応力の算定：本研究では2方法について考える。(Meth1) 3式の境界極限をとる方法がある。この場合、変位としては $u_i(Q) = u_i(Q) - u_i(P)$ なるものを使用することに注意する。(Meth2) 応力を算定する点で、曲線座標を考へ、変微分を求めることにより、算定した。この方法は積分を行なう必要がなく、 u_i , t_j より直接応力を求めることが可能である。

4. 解析例

モデルとしては、(Model1) 空洞に一様な内圧が作用する場合、(Model2) 空洞に無限遠から一様な応力 σ_0 を受ける場合を考えた。解析結果を表に示す。球を24分割、54分割とした場合、内部応力の精度に大きな差は認められず、24分割ですでに十分な形状近似が行なわれていると考えてよい。つまり、2次近似を使用した場合には、かなりあい要素分割でも、ある程度の精度が得られる。境界応力の場合には、Meth1よりMeth2の方が、各点での精度のばらつきが少なく、より信頼度が高い方法であると言えるであろう。

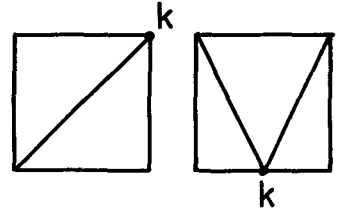


図-2

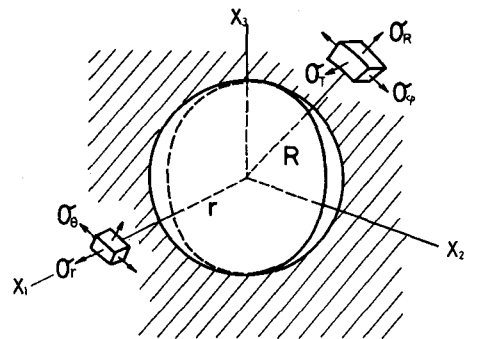


図-3

$\sigma_r / \sigma_0 = 0$			$\sigma_0 / \sigma_0 = -0.5$			$\sigma_r / \sigma_0 = 0$		
	Meth 1	Meth 2		Meth 1	Meth 2		Meth 1	Meth 2
24要素	-0.064	-0.448×10^{-7}	24要素	-0.586(17.1)	-0.486(3.1)	24要素	-0.008	2.35×10^{-5}
54要素	-0.016	0.0	54要素	-0.517(3.36)	-0.491(1.76)	54要素	0.002	0.0

$\sigma_r, \sigma_0 = 2.0$			$\sigma_y / \sigma_0 = 0$		
	Meth 1	Meth 2		Meth 1	Meth 2
24要素	2.055(2.75)	1.975(1.25)	24要素	0.017	-0.005
54要素	2.006(0.3)	1.989(0.55)	54要素	0.001	-0.002

() 内は誤差

$$\sigma_{11}^n = \sigma^{\infty}, \quad \nu = 0.2$$

表-1 Model 2における境界応力