積分方程式法による固有値問題の精度解析について

京都大学工学部　正員　丹羽義次
京都大学工学部　正員　小林昭一
京都大学工学部　正員○北原道弘

[1] はじめに　弾性体の固有値問題を積分方程式法により解く方法およびこの方法による固有値解析の特徴が明らかにされつつあり、ある種の積分方程式を用いた場合の固有値の精度はかなりよいことがわかっている。単に積分方程式といっても定式化によりさまざまな積分方程式が構成されるわけであって、各種積分方程式による固有値、固有密度、固有モードの精度を統一的に確認しておくことが必要と思われる。本報告では平面弾性問題における面外振動問題について、Green、Layer表示により、オ1種、オ2種積分方程式および混合問題の積分方程式を構成し、固有値、固有密度、固有モードの精度を検討し、最後に面内振動問題の固有値、固有密度、固有モードの一解析例を示す。

[2] 基本解と積分方程式　2次元定常弾性問題の基本解は次のようになる。

面内振動問題　：　$\mathbb{U} = \frac{i}{4\mu}[H_0^{(1)}(k_T r)\mathbb{I} + \frac{i}{4\rho\omega^2}\nabla\nabla\{H_0^{(1)}(k_T r) - H_0^{(1)}(k_L r)\}]$

面外振動問題　：　$U = \frac{i}{4\mu}H_0^{(1)}(k_T r)$　　（$k_T = \omega/C_T$、$k_L = \omega/C_L$ はそれぞれ横波、縦波の波数）

積分方程式の各種定式化による固有値の精度を検討するために次の積分方程式を考える。

(A) オ一種(変位)問題　(F.I.)

(i) $\mathbb{S}\,\underset{\sim}{t} = \underset{\sim}{0}$　(F.I.(G), F.E.(G))

(ii) $(\frac{1}{2}\mathbb{I} - \mathbb{K})\underset{\sim}{t} = \underset{\sim}{0}$　(F.I.(G), S.E.(L))

(iii) $(\frac{1}{2}\mathbb{I} - \bar{\mathbb{K}}^{*})\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{0}$　(F.I.(L), S.E.(G))

(B) オ二種(応力)問題　(S.I.)

(i) $\mathbb{D}_n\,\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{0}$　(S.I.(G), S.E.(G))

(ii) $(\frac{1}{2}\mathbb{I} + \bar{\mathbb{K}}^{*})\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{0}$　(S.I.(G), F.E.(L))

(iii) $(\frac{1}{2}\mathbb{I} + \mathbb{K})\underset{\sim}{t} = \underset{\sim}{0}$　(S.I.(L), F.E.(G))

(C) オ三種(混合)問題　(M.I.)　：(i)は∂D_u, ∂D_t共に変位表示を、(ii)は∂D_uは変位、∂D_tは応力表示を用いたGreen積分表示式による積分方程式。

(i) $$\begin{cases}(\mathbb{S}\underset{\sim}{t})_{\partial D_u}(x) - (\bar{\mathbb{K}}^{*}\underset{\sim}{u})_{\partial D_t}(x) = \underset{\sim}{0} & x \in \partial D_u \quad (M.I.(G)) \\ (\mathbb{S}\underset{\sim}{t})_{\partial D_u}(x) - [(\frac{1}{2}\mathbb{I} + \bar{\mathbb{K}}^{*})\underset{\sim}{u}]_{\partial D_t}(x) = \underset{\sim}{0} & x \in \partial D_t\end{cases}$$

(ii) $$\begin{cases}(\mathbb{S}\underset{\sim}{t})_{\partial D_u}(x) - (\mathbb{K}\underset{\sim}{u})_{\partial D_t}(x) = \underset{\sim}{0} & x \in \partial D_u \quad (M.I.(G)) \\ (\mathbb{K}\underset{\sim}{t})_{\partial D_u}(x) - (\mathbb{D}_n\underset{\sim}{u})_{\partial D_t}(x) = \underset{\sim}{0} & x \in \partial D_t\end{cases}$$

上に示した積分作用素は、$\mathbb{S}$：1重層、$\mathbb{K}$：1重層の微分、$\bar{\mathbb{K}}^{*}$：2重層、$\mathbb{D}_n$：2重層の微分に対応している。

Table 1 Eigenvalues of the first problem (square(u_t=0), N=28, Δk_T=0.1, 8-point Gauss)

m \ n	1	2	3	4	5	6
1	4.443 4.4 4.4 4.4 0.98 0.98 0.98	7.025 7.0 7.0 7.0 0.36 0.36 0.36	9.935 9.9 9.9 9.9 0.35 0.35 0.35	12.953 12.9 12.9 12.9 0.41 0.41 0.41	16.019 16.0 16.0 16.0 0.12 0.12 0.12	19.110 19.1 19.1 19.1 0.05 0.05 0.05
2		8.886 8.9 8.8 8.9 0.16 0.97 0.16	11.327 11.3 11.3 11.3 0.24 0.24 0.24	14.050 14.0 14.0 14.0 0.36 0.36 0.36	16.918 16.8 16.8 16.8 0.70 0.70 0.70	19.869 19.8 19.8 19.8 0.35 0.35 0.35
3			13.327 13.3 13.3 13.3 0.22 0.22 0.22	15.708 15.7 15.7 15.7 0.05 0.05 0.05	18.318 18.3 18.3 18.2 0.10 0.10 0.63	21.074 21.0 21.0 20.9 0.35 0.35 0.83

Exact ($\bar{k}_T$)		
$\mathbb{S}$ (k_T)	$\bar{\mathbb{K}}^{*}$ (k_T)	$\mathbb{K}$ (k_T)
e	e	e

$e = |\bar{k}_T - k_T|/\bar{k}_T$ (%)

[3] 各種積分方程式による固有値の精度について　Table 1, 2はそれぞれ正方形、面外振動に対するオ一種、オ二種問題の固有値の精度を示しており、各欄のオ1、オ2、オ3列はそれぞれ積分核　$\mathbb{S}$, $\mathbb{K}$, $\bar{\mathbb{K}}^{*}$ (Table 1)、$\mathbb{D}_n$, $-\bar{\mathbb{K}}^{*}$, $-\mathbb{K}$ (Table 2)　を持つ積分方程式により求めた固有値および相対誤差をパーセントで示している。Table 3は直角2等辺3角形(斜辺の長さ$\sqrt{2}$)の斜辺の面外変位を固定したオ三種問題の固有値を(C)(i)の方法により求めた結果を示している。3つの問題に対し、どの積分方程式を用いても、ほぼ

Table 2 Eigenvalues of the second problem (square(t_3=0), N=28, Δk_T=0.1, 8-point Gauss)

m \ n	1	2	3	4	5	6
0	3.142 2.8 3.2 3.2 10.88 1.85 1.85	6.283 6.3 6.3 6.3 0.27 0.27 0.27	9.425 9.3 9.4 9.5 1.33 0.27 0.80	12.566 12.5 12.6 12.6 0.27 0.27 0.27	15.708 15.7 15.7 15.8 0.05 0.05 0.59	18.850 18.8 18.9 18.9 0.27 0.27 0.27
1	4.443 4.3 4.5 4.5 3.22 1.28 1.28	7.025 6.7 7.0 7.1 4.63 0.36 1.07	9.935 9.9 9.9 10.0 0.35 0.35 0.65	12.953 12.8 13.0 13.0 1.18 0.36 0.36	16.019 16.0 16.0 16.0 0.12 0.12 0.12	19.110 19.0 19.1 19.1 0.58 0.05 0.05
2		8.886 8.7 8.9 8.9 2.09 0.16 0.16	11.327 11.1 11.3 11.4 1.12 0.26 0.64	14.050 14.0 14.0 14.1 0.36 0.36 0.36	16.918 16.8 16.9 17.0 0.70 0.11 0.48	19.869 19.8 20.0 20.0 0.35 0.66 0.66

Exact ($\bar{k}_T$)		
$\mathbb{D}_n$ (k_T)	$-\bar{\mathbb{K}}^{*}$ (k_T)	$-\mathbb{K}$ (k_T)
e	e	e

$e = |\bar{k}_T - k_T|/\bar{k}_T$ (%)

Table 3 Eigenvalues of the third problem (triangular(mixed), N=40, Δk_T=0.01, 8-point Gauss)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k_T^{mn}	k_T^{11}	k_T^{22}	k_T^{13}	k_T^{33}	k_T^{24}	k_T^{15}	k_T^{44}	k_T^{35}	k_T^{26}	k_T^{55}
$\bar{k}_T$	3.142	6.283	7.025	9.425	9.935	11.327	12.566	12.953	14.050	15.708
k_T	3.15	6.28	7.04	9.43	9.93	11.34	12.56	12.96	14.04	15.70
$\lvert\bar{k}_T - k_T\rvert/\bar{k}_T$ (%)	0.25	0.05	0.21	0.05	0.05	0.11	0.05	0.05	0.07	0.05

KITAHARA, michihiro　　NIWA, yoshiji　　KOBAYASHI, shoichi

1%以内の相対誤差内で固有値は求まることがわかる。

[4] 固有密度、固有モードの精度について Fig. 1~3 は Table 4 に示した円形、面外振動の固有値について、境界分割数Nをそれぞれ1, 8, 16として固有密度(⊙印)と固有モード($x_1 \geq 0$軸上)を最小自乗法(x_1軸上の密度を1.0と指定)により求めたものである。Nの選び方の指針としては、密度半波長の内部に3点を含むように選んでいる。固有密度の精度については指定した値1.0の満足度が1つの目安となるが、今の場合各Nについて小数点以下2ケタの精度で満足されている。Table 5 は Fig.1~3に示した固有モードの精度を検討するために節円の半径を求めた結果を示している。これらの結果より、節線により決まる密度半波長を表現するに最低限必要な数の境界点をとれば、固有密度、固有モードはコンマ数パーセントの誤差内の精度で求まることがわかる。

Table 4 Eigenvalues of the first problem (circular($u_3=0$), $\Delta k_T=0.001$, 8-point Gauss on arc)

s \ n	0	1	2
0	2.405	3.832	5.136
	2.406	3.833	5.135
	0.04	0.03	0.02
1	5.520	7.016	8.417
	5.521	7.017	8.417
	0.02	0.01	0.00
2	8.654	10.173	11.620
	8.656	10.176	11.619
	0.02	0.03	0.01

Table 5 Raddi of nodal circles (N=1(n=0), N=8(n=1), N=16(n=2); 48-point Gauss on arc)

k_T^{sn}	n=0		n=1		n=2	
	k_T^{10}	k_T^{20}	k_T^{11}	k_T^{21}	k_T^{12}	k_T^{22}
$\bar{r}_1$	0.4357	0.2780	0.5462	0.3766	0.6101	0.4420
r_1	0.4361	0.2789	0.5459	0.3774	0.6081	0.4442
error	0.09	0.32	0.05	0.21	0.33	0.50
$\bar{r}_2$		0.6379		0.6896		0.7244
r_2		0.6379		0.6823		0.7264
error		0.00		1.06		0.28

error$=|\bar{r}_i-r_i|/\bar{r}_i$ (%)

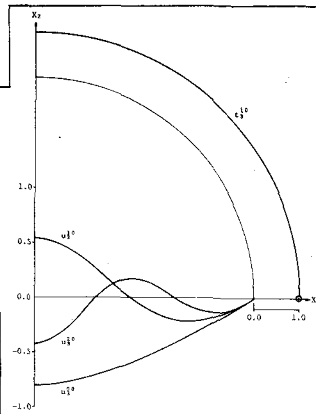

Fig.1 Eigen densities and eigen modes for n=0 (N=0)

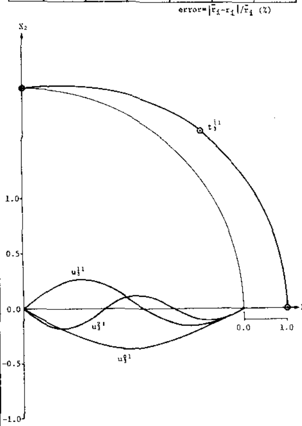

Fig.2 Eigen densities and eigen modes for n=1 (N=8)

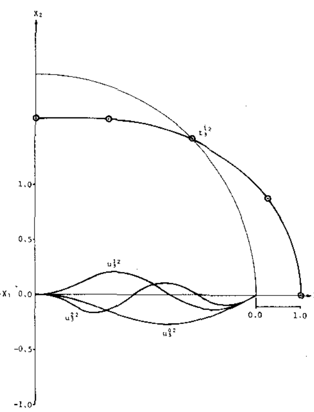

Fig.3 Eigen densities and eigen modes for n=2 (N=16)

[5] 面内振動問題の固有値、固有密度、固有モード Fig.4~6は、円形、固定条件のもとに、本手法により求めた固有値($N=28$)のうち、小さいものから3個 $k_T^{11}=3.39$, $k_T^{10}=3.85$, $k_T^{12}=5.25$ に対する固有密度および固有モードを示している(ポアソン比$\nu=0.25$)。円周の法線上に示した実線、点線はt_1, t_2の分布(固有密度)、x_1, x_2軸の法線上に示した実線、点線はu_1, u_2の分布(固有モード)を示している。これより、第1モードは一軸引張的、第2モードはせん断的、第3モードは2軸圧伸的なモードであることがわかる。

[6] おわりに 積分核として$\mathbb{S}$, $\mathbb{K}$, $\bar{\mathbb{K}}^*$, $\mathbb{D}_n$いずれを含む積分方程式を構成しても固有値は精度よく求まることがわかった。面内振動問題の結果などの詳細は当日発表する。

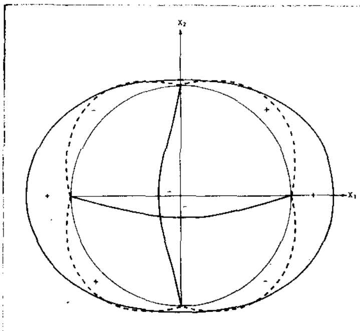

Fig.4 Eigen density and eigen mode (k_T^{11}=3.39)

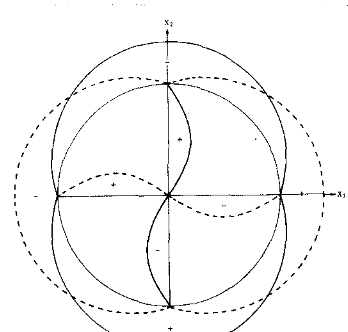

Fig.5 Eigen density and eigen mode (k_T^{10}=3.85)

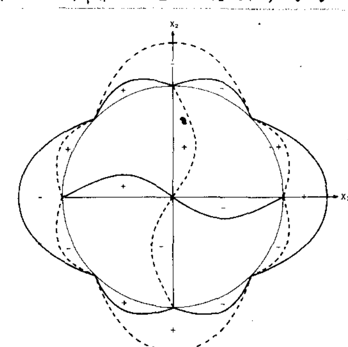

Fig.6 Eigen density and eigen mode (k_T^{12}=5.25)