積分方程式法による一様面内力を受ける板の固有振動問題の解析

京都大学工学部　正　員　丹羽義次
京都大学工学部　正　員　北原道弘
京都大学大学院　学生員　○宮岸和信

1. はじめに

平板の固有振動問題は、その工学的重要性のために古くから研究され、また、かなり整理されている。しかし、任意形状板を対象として固有値、固有モードを精度よく求める一般的手法は、いまだ確立していないように思われる。この任意形状、任意境界条件を有する板の固有値解析を目的として、積分方程式法による固有振動問題の解析が最近行なわれており、その特徴もかなり明らかになってきている。本研究においては、面内力を考慮し、一様面内力を受ける平板の固有振動問題を積分方程式法により定式化し、数値解析を行なってその適用性の検討を行なった。積分方程式の構成に際しては、Green積分表示、および層ポテンシャル表示による2つの方法を考え、任意幾何形状、任意境界条件、特に混合境界条件を有する問題に対して固有値解析を行なった。

2. 積分方程式による固有振動問題の定式化

一様面内力 $S(S_x=S_y=S,\ S_{xy}=0)$ を受ける等方均質板の面外振動の定常場を支配する微分方程式は、横荷重がない場合次のようになる。

$$\mathbb{L}u=(\Delta+\alpha^2)(\Delta-\beta^2)u=0 \qquad ----(1)$$

ここに、$\lambda^4=\rho h\omega^2/K\geq 0$, $\zeta^2=S/K\geq 0$, $K=Eh^3/12(1-\nu^2)$, Δ; ラプラシアン

$\alpha^2=\frac{1}{2}[\sqrt{\zeta^4+4\lambda^4}\mp\zeta^2]\geq 0$, $\beta^2=\frac{1}{2}[\sqrt{\zeta^4+4\lambda^4}\pm\zeta^2]\geq 0$ (符号は上が引張, 下が圧縮問題)

である。この時、(1)式を満足する基本解は、基本解に対する偏微分方程式を $\mathbb{L}U=-\delta\cdot\mathbb{1}$ (δ; Dirac measure) とすると次のようになる。

$$U(r)=-\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\frac{i}{4}\left[H_0^{(1)}(\alpha r)-H_0^{(1)}(i\beta r)\right] \qquad -----(2)$$

ここに、$H_0^{(1)}(x)$ は才1種0次Hankel関数，r は2点間の距離を表わしている。

また、Fig.1に示すような形状の板に対し、境界条件は次式で示される。

$$\mathbb{B}_j u(x)=0 \quad (j=1,2) \quad x\in\partial D \qquad -----(3)$$

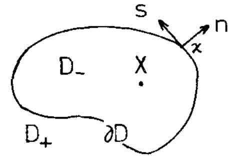


Fig.1

ただし境界作用素 $\mathbb{B}_1$, $\mathbb{B}_2$ としては、次の4つのうち異なる2つを選ぶ。(4) $\mathrm{Tr}(\cdot)$　(5) $\mathrm{Tr}\,\partial_n(\cdot)$　(6) $\mathbb{M}_n(\cdot)\equiv\mathrm{Tr}[\Delta(\cdot)-(1-\nu)\partial_s^2(\cdot)]$

(7) $\mathbb{V}_n(\cdot)\equiv\mathrm{Tr}\,\partial_n\Delta(\cdot)+(1-\nu)\partial_s\mathrm{Tr}\,\partial_n\partial_s(\cdot)$

なお、Tr は境界極限を意味する。

次に固有値決定積分方程式を考える。

Green積分表示による固有値決定積分方程式は、次に示す内部Green公式

$$F\cdot u(x)=\int_{\partial D}[U(x,y;\lambda)\{\mathbb{V}_n u(y)\}-\{\partial_{n_y}U(x,y;\lambda)\}\{\mathbb{M}_n u(y)\}+\{\mathbb{M}_{n_y}U(x,y;\lambda)\}\{\partial_n u(y)\}$$
$$-\{\mathbb{V}_{n_y}U(x,y;\lambda)\}u(y)]\,ds_y \qquad -----(8)$$

MIYAGISI, kazunobu　　NIWA, yoshiji　　KITAHARA, michihiro

$$F\,\partial_{n_x} u(x)=\int_{\partial D}[\{\partial_{n_x} U(x,y;\lambda)\}\{V_n u(y)\}-\{\partial_{n_x}\partial_{n_y} U(x,y;\lambda)\}\{M_n u(y)\}$$
$$+\{\partial_{n_x} M_{n_y} U(x,y;\lambda)\}\{\partial_n u(y)\}-\{\partial_{n_x} V_{n_y} U(x,y;\lambda)\}u(y)]\,ds_y \qquad ----(9)$$

ただし，Fの値は $F=1\ (X\in D_-)$，$F=1/2\ (X=x\in\partial D)$，$F=0\ (X\in D_+)$

によって，また，層ポテンシャル表示による固有値決定積分方程式は，2つのポテンシャルの重ね合わせによる次式

$$u(x)=\int_{\partial D}[U(x,y;\lambda)\,\mu_0(y)]\,ds_y-\int_{\partial D}[\{\partial_{n_y} U(x,y;\lambda)\}\mu_1(y)]\,ds_y \qquad ----(10)$$

によって，固有値問題に対する境界条件(3)を考慮すれば得られる。すなわち，境界値問題(1)，(3)に対し，固有値を求める問題は，境界積分方程式に非自明解が存在するためのパラメーターλの値を求める問題として定式化される。固有値が求まると，それに対して境界固有密度μ_0，μ_1が得られ，さらに内部での固有モードが(8)式または(10)式より求まる。

3. 数値解析例

ここでの数値解析例としては，一例として直角二等辺三角形（斜辺を2として正規化）を対象とし，また，境界条件として固定（斜辺）－単純（他の2辺）混合支持条件を解析対象にして，Green積分表示を用いた。Table 1には，境界分割数N=28とした場合の第5固有値までの値を示し，Fig.2，3には，第1，2固有値に対する固有密度および固有モードを各々(a)図および(b)図に示した。求めた固有値の精度については，第1固有値の値はNASA SP-160による結果と比べて誤差は0.1%である。また，本手法により円形，正方形の形状について計算した場合の誤差もほぼ0.1%以内に収まっていることにより，第1固有値以外の固有値も十分な精度を持つと考えられる。層ポテンシャル表示式による場合も，固有値の精度はGreen積分表示式による場合とほぼ一致している。Table 2は，正方形固定支持板に対するζの変化による第1固有値の値の変化を示している。なお，固有密度図において実線，点線，一点鎖線は各々μ_0（せん断力），μ_1（モーメント），μ_2（回転角）を示す。この密度図に示すように，本手法によれば各モードに対する境界上の力の分布が直接的に求まり，本解析法の1つの有効性を示している。

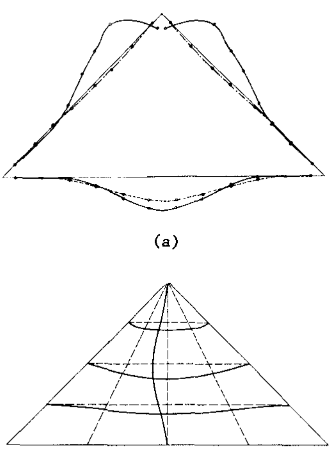
詳細については当日発表する。

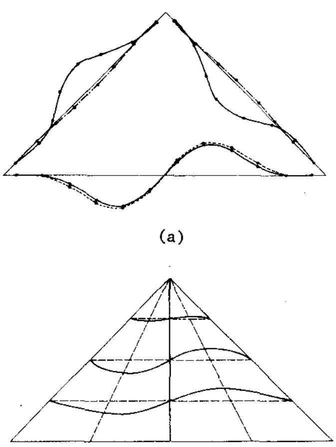
Table 1 (N=28,Δλ=0.01,ν=0.3)

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
ζ= 5 (Tension)	6.48	8.41	9.35	10.43	11.20
ζ= 0 (Frequency)	5.73	7.78	8.78	9.89	10.70
ζ=-5 (Compression)	4.42	6.94	8.06	9.26	10.12

Table 2 (N=28,Δλ=0.1)

ζ	NASA SP-160 λ Lower bound	NASA SP-160 λ Upper bound	Integral Eq. λ
0	6.00		6.0
$\sqrt{5}\pi$	7.04	7.06	7.0
$\sqrt{10}\pi$	7.74	7.77	7.7
$\sqrt{20}\pi$	8.72	8.78	8.7
$\sqrt{30}\pi$	9.45	9.52	9.4
$\sqrt{50}\pi$	10.52	10.63	10.5
10π	12.18	12.45	12.3
$\sqrt{200}\pi$	14.41	14.69	14.4


(a)
(b)
Fig.2 (1st)


(a)
(b)
Fig.3 (2nd)