

積分方程式の有限要素構成による拡散問題の解析

京都大学工学部 正員 丹羽義次
 京都大学工学部 正員 太津政康
 京都市 正員 ○中村豊彦

1. はじめに

積分方程式法と有限要素法は、ともに有効な数値解析手法として、多くの分野にその適用が成されてきた。両手法にはそれぞれ利害得失があり、そのことを考慮して、領域の一部を有限要素法を用いて解き、他の部分を積分方程式法に従って解くことにより、両手法の利点を取りだすことができるであろうと考えられる。本研究は、積分方程式の有限要素構成による数値解析手法を拡散問題に適用して、その解析を試みたものである。また、その応用例として、地下立地原子力発電所周辺の核種移動の数値シミュレーションを行なった。

2. 積分方程式の有限要素構成の定式化

以下に、積分方程式の有限要素構成の概要を示す。積分方程式法により拡散問題を解く方法には、Somigliana公式を用いるものと、一重層ポテンシャルを用いるものの2つがある。本研究では、一重層ポテンシャルを用いた定式化を行なう。

(i) 定常拡散問題 支配方程式、境界条件は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(x) &= 0 & x \in \Omega \\ \phi(x) &= \bar{\phi}(x) & x \in \Gamma_1; \quad \frac{\partial \phi(x)}{\partial n} = \frac{\partial \bar{\phi}(x)}{\partial n} & x \in \Gamma_2 \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、Fig. 1 に示すような二次元問題を対象とし、 ∇^2 は Laplacian。

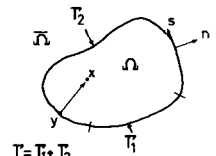


Fig. 1

(1) 式を満たす関数中の一重層ポテンシャル表示、ならびにその境界上での法線方向導関数は、次式で与えられる。

$$\phi(x) = \int_{\Gamma} \mu(y) G(x, y) d\Gamma \quad x \in \Omega, y \in \Gamma \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial n} = \int_{\Gamma} \mu(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_x} d\Gamma + \pi \mu(x) \quad x, y \in \Gamma \quad (3)$$

ここに、 μ : 一重層密度、 $G(x, y) = \ln |x - y|^{-1}$ 、 $x = (x_1, x_2)$ 、 $y = (y_1, y_2)$ 。

対象とする場の汎関数は、Hellinger-Reissner原理により、次式で表わされる。

$$\Pi = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \phi \nabla^2 \phi d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} \frac{\partial \phi}{\partial n} \phi d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} \frac{\partial \phi}{\partial n} \phi d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial \phi}{\partial n} \bar{\phi} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \frac{\partial \phi}{\partial n} \bar{\phi} d\Gamma \quad (4)$$

有限要素領域と結合するために、境界上で $\bar{\phi}$ を次のようにおく。

$$\bar{\phi} = \bar{N} \phi^e \quad \bar{N} : \text{有限要素領域の形状関数}, \phi^e : \text{要素節点のポテンシャルの値} \quad (5)$$

(2), (3) 式を離散化して(4)式に用い、 $\{\mu\}, \{\phi^e\}$ に関してそれぞれ停留の条件を用いることにより、次式を得る。

$$[K]\{\mu\} + [P]\{\phi^e\} + \{F\} = 0 \quad (6), \quad [P]^T \{\mu\} = 0 \quad (7)$$

(6), (7) 式より $\{\mu\}$ を消去して次式を得る。

$$[\hat{K}]\{\phi^e\} + \{\hat{F}\} = 0 \quad (8)$$

$$\text{ここに、} [\hat{K}] = -[P]^T [K]^{-1} [P] \quad , \quad \{\hat{F}\} = -[P]^T [K]^{-1} \{F\}$$

以上により、積分方程式の有限要素構成は成された。

(ii) 非定常拡散問題 支配方程式、初期条件、境界条件は、次式で与えられる。

$$D \nabla^2 \phi(x, t) = \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} \quad (9)$$

$$\text{初期条件 } \phi(x, 0) = \phi_0(x) \quad x \in \Omega$$

$$\text{境界条件 } \phi(x, t) = \bar{\phi}(x, t) \quad x \in \Gamma_1 ; \quad \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial n} = \frac{\partial \bar{\phi}(x, t)}{\partial n} \quad x \in \Gamma_2$$

ここに、Dは拡散係数。

(9)式を満たす関数中の一重層ポテンシャル表示、ならびにその境界上の法線方向導関数は、次式で与えられる。

$$\phi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_{\Gamma} \frac{a(y, \tau)}{r} \exp\left(-\frac{r^2}{4D(t-\tau)}\right) d\Gamma y \quad x \in \Omega, y \in \Gamma \quad (10)$$

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial n} = a(x, t) - \int_0^t d\tau \int_{\Gamma} \frac{a(y, \tau)}{4\pi D(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4D(t-\tau)}\right)$$

$$\times r \cos(\angle, n) d\Gamma y \quad x, y \in \Gamma \quad (11)$$

ここに、aは一重層密度、 $r = |x - y|$ 。

(9)式に対するGurtinの汎関数に、Hellinger-Reissnerの原理を適用して次式を得る。

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ \phi * \phi + \phi_{,i} * D * \phi_{,i} - 2\phi_0 * \phi \} d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_1} D * \frac{\partial \phi}{\partial n} * (\phi - \bar{\phi}) d\Gamma - \int_{\Gamma_2} D * \frac{\partial \phi}{\partial n} * \phi d\Gamma \end{aligned} \quad (12)$$

ここに、記号*はconvolution演算を意味する。

有限要素領域と結合するために、境界上で $\bar{\phi}$ を(5)式のようにおく。以下、定常の場合と同様にして、積分方程式の有限要素構成が成される。

3. 数値解析例

有限要素領域に対しては、Galerkin法により定式化し、上述の積分方程式による構成要素との結合によって数値解析を行なった。定常問題に対しては、Fig. 2に示すモデルに対して次にあげる境界条件のもとに解析を行なった。

$\phi(x) = 100 \quad x \in \Gamma_1$, $\phi(x) = 0 \quad x \in \Gamma_2$, $\partial \phi(x) / \partial n = 0 \quad x \in \Gamma_3, \Gamma_4$ 。解析結果をFig. 3に示す。

非定常問題に対しては、Fig. 4に示すモデルに対して次にあげる初期条件、境界条件のもとに解析した。

初期条件 $\phi(x, 0) = 0 \quad x \in \Omega$; 境界条件 $\phi(x, t) = 1 \quad x \in \Gamma_1$, $\phi(x, t) = 0 \quad x \in \Gamma_2$, $\partial \phi(x, t) / \partial n = 0 \quad x \in \Gamma_3, \Gamma_4$

解析結果はFig. 5に示す。解析結果の詳細および応用例に関しては、当日発表を行なう。

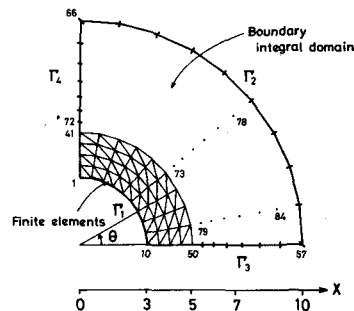


Fig. 2

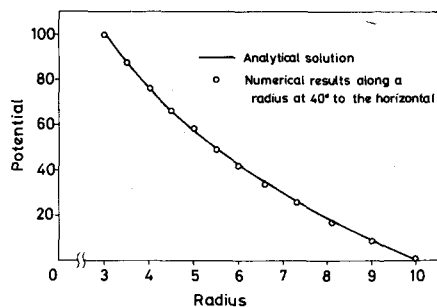


Fig. 3

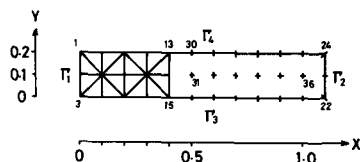


Fig. 4

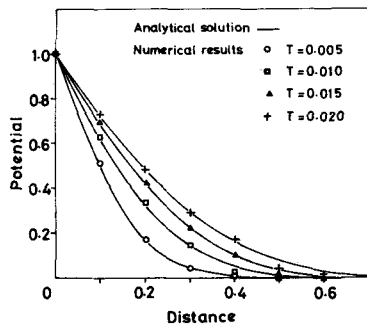


Fig. 5