# 平面ネットワーク上における多種流問題に関する一考察

大阪市立大学工学部　正員　○岡村裕子
大阪市立大学工学部　正員　西村昂

## 1. はじめに

道路網に一定のOD構成比を与えたときの最大フローTを、道路網のグラフが平面で、すべての発着点が外周上にあるときに求める(参考文献[1]の拡張になっている)。これは交通処理能力の評価に関する1つの基礎理論となるものと言える。

グラフを$G=(V,X)$で表わす。Vは点の集合、Xは線の集合である。単位OD表$(P_{i,j})$は対称$(P_{i,j}=P_{j,i})$であるとし、点$i$と$j$を接合する線$(i,j)$の片側車線の容量を$C_{i,j}$とする。Vの部分集合Kに対して、Kの点と$\overline{K}(=V-K)$の点を結ぶ線の集合を$(K:\overline{K})$で表わし、カットとよぶ。カット$(K:\overline{K})$の容量$\sum_{(i,j)\in(K:\overline{K})} C_{i,j}$を$C(K:\overline{K})$であらわす。カット$(K:\overline{K})$の断面交通$\sum_{i\in K, j\in\overline{K}} P_{i,j}$を$Q(K:\overline{K})$であらわす。このとき最大フローは

$$T=\min_{(K:\overline{K})}\left\{ C(K:\overline{K}) \big/ Q(K:\overline{K}) \right\}$$

であり、$C_{i,j}$、$TP_{i,j}$ ($=f_{i,j}$とおく)が偶数であるときはフローが整数で運べることがわかっている(参考文献[2])。これを用いてTを配分するアルゴリズムを考える。
$T=C(K:\overline{K})/Q(K:\overline{K})$となる$(K:\overline{K})$を臨界カットとよぶ。

## 2. アルゴリズム

線の方向を考えずに配分するので$f_{i,j}$と$f_{j,i}$を同一視し、$f_{i,j}=f_{j,i}=\alpha$とすると、$\alpha$の片側車線への配分を考える(もう1つの車線に同様にして$\alpha$を配分できるので、ここでは省略する)。$C_{i,j}$、$f_{i,j}$は偶数とする(そうでないときは適当に定数$\beta$をかけ、最後に1単位を$1/\beta$になおせばよい)。以下のアルゴリズムの有効なことは[2]の証明よりよい。

step1　$f_{i,j}>0$ $(j=j_1,j_2,\cdots,j_\ell)$で点$i$に接合する残余容量が正の線が$(i,k)$ 1つしかないとき　$(i,k)$に$f_{i,j}$ $(j=j_1,\cdots,j_\ell)$を流し、Reset $f_{i,j}=0$, $f_{k,j}=f_{k,j}+f_{i,j}$ $(j=j_1,\cdots,j_\ell)$, $C_{i,k}=0$.

step2　$f_{i,j}>0$, $C_{i,j}>0$となる$i,j$があるとき、線$(i,j)$に$f_{i,j}$を1流し、
Reset　$f_{i,j}=f_{i,j}-1$ , $C_{i,j}=C_{i,j}-1$ .

step3　臨界カットが存在しないときは、臨界カットが生じるまで任意の線の容量を1へらす。

step4　Gのある臨界カットに含まれる外周の線を$(a,b)$とする。$K_1\ni a$, $\overline{K_1}\ni b$をみたし$K_1$の中の外周の点の個数が最小の臨界カット$(K_1:\overline{K_1})$を選ぶ。

step5　$K_1$の点$i$と$\overline{K_1}$の点$j$で$f_{i,j}>0$となるものがある。これをみたし$b$から$j$への$K_1$の点を通らない外周上の道が一番短くなるように$j$を選ぶ。

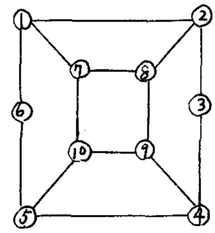
step6　$f_{i,j}$を線$(a,b)$に1流す。
Reset　$f_{i,j}=f_{i,j}-1$, $f_{i,a}=f_{i,a}+1$, $f_{b,j}=f_{b,j}+1$, $C_{a,b}=C_{a,b}-1$ .

step7　$f_{i,j}>0$となる$i,j$があるときはstep1へ、そうでないときはstop。このときすべての$f_{i,j}$が整数で配分されている。

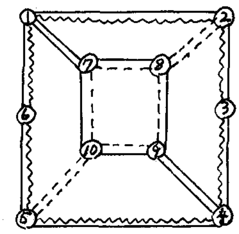
3、例

図－1のようなGを考える。
すべての線に対して $C_{i,j}=2$ とする。

OD表は $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。




図－1




図－2

$f_{1,4}$ ———
$f_{2,5}$ - - - - -
$f_{3,6}$ 〰〰

このとき $T=16$, $f_{1,4}=4$, $f_{2,5}=2$, $f_{3,6}=2$.
臨界カット $(K:\bar{K})$ を与えるKは $\{1,5,6,7,10\}$, $\{1,6\}$ 等である。

アルゴリズム

step 1, 2, 3　なし
step 4　$(a,b)=(6,5)$, $K_1=\{1,6\}$ を選ぶ
step 5　$f_{1,4}>0$, $f_{6,3}>0$ であるが $j$ として5に近い4を選ぶ.
step 6　$f_{1,4}$ を $(6,5)$ に1流し. Reset $f_{1,4}=3$, $f_{1,6}=1$, $f_{5,4}=1$, $C_{5,6}=1$.
step 2　$f_{1,6}$ を $(1,6)$ に1、Reset $f_{1,6}=0$, $C_{1,6}=1$
$f_{5,4}$ を $(4,5)$ に1、Reset $f_{5,4}=0$, $C_{4,5}=1$
step 4　$(a,b)=(6,5)$, $K_1=\{6\}$
step 5,6　$f_{6,3}$ を $(6,5)$ に1. Reset $f_{6,3}=1$, $f_{5,3}=1$, $C_{6,5}=0$
step 1　$f_{6,3}$ を $(6,1)$ に1. Reset $f_{6,3}=0$, $f_{1,3}=1$, $C_{1,6}=0$
step 4　$(a,b)=(5,4)$, $K_1=\{5\}$
step 5,6　$f_{5,3}$ を $(5,4)$ に1. Reset $f_{5,3}=0$, $f_{4,3}=1$, $C_{5,4}=0$
step 1　$f_{5,2}$ を $(5,10)$ に2. Reset $f_{5,2}=0$, $f_{10,2}=2$, $C_{5,10}=0$
step 2　$f_{4,3}$ を $(4,3)$ に1. Reset $f_{4,3}=0$, $C_{4,3}=1$.
step 4　$(a,b)=(1,7)$, $K_1=\{1\}$
step 5,6　$f_{1,4}$ を $(1,7)$ に1. Reset $f_{1,4}=2$, $f_{7,4}=1$, $C_{1,7}=1$
step 4　$(a,b)=(1,7)$, $K_1=\{1\}$
step 5,6　$f_{1,4}$ を $(1,7)$ に1. Reset $f_{1,4}=1$, $f_{7,4}=2$, $C_{1,7}=0$
step 1　$(1,2)$ に $f_{1,3}$ を1と $f_{1,4}$ を1流す. Reset $f_{1,3}=0$, $f_{1,4}=0$, $f_{2,4}=1$, $f_{2,3}=1$, $C_{1,2}=0$
step 2　$f_{2,3}$ を $(2,3)$ に1. Reset $f_{2,3}=0$, $C_{2,3}=1$
step 4　$(a,b)=(10,9)$, $K_1=(7,10)$
step 5,6　$f_{7,4}$ を $(10,9)$ に1. Reset $f_{7,4}=1$, $f_{7,10}=1$, $f_{9,4}=1$, $C_{10,9}=1$
step 2　$f_{7,10}$ を $(7,10)$ に1、Reset $f_{7,10}=0$, $C_{7,10}=1$
$f_{9,4}$ を $(9,4)$ に1, Reset $f_{9,4}=0$, $C_{9,4}=1$
step 4　$(a,b)=(10,9)$, $K_1=\{10\}$
step 5,6　$f_{10,2}$ を $(10,9)$ に1. Reset $f_{10,2}=1$, $f_{9,2}=1$. $C_{10,9}=0$
step 1　$f_{10,2}$ を $(10,7)$ に1. Reset $f_{10,2}=0$, $f_{7,2}=1$, $C_{10,7}=0$
$(7,8)$ に $f_{7,4}$ を1と $f_{7,2}$ を1. Reset $f_{7,4}=0$, $f_{8,4}=1$, $f_{7,2}=0$, $f_{8,2}=1$, $C_{7,8}=0$
step 4　$(a,b)=(9,4)$, $K_1=\{8,9\}$
step 5,6　$f_{8,4}$ を $(9,4)$ に1. Reset $f_{8,4}=0$, $f_{8,9}=1$, $C_{9,4}=0$
step 1　$f_{4,2}$ を $(4,3)$ に1. Reset $f_{4,2}=0$, $f_{2,3}=1$, $C_{4,3}=0$
$f_{2,3}$ を $(2,3)$ に1, Reset $f_{2,3}=0$, $C_{2,3}=0$
$(2,8)$ に $f_{2,8}$ を1と $f_{9,2}$ を1. Reset $f_{2,8}=0$, $f_{9,2}=0$, $f_{9,8}=2$, $C_{2,8}=0$.
$f_{8,9}$ を $(8,9)$ に2、Reset $f_{8,9}=0$, $C_{8,9}=0$
step 6　stop. 図－2の配分がえられた.

4. あとがき

計算機を用いての実用化にあたってはstep4の探索を簡単にすることが今後の課題である.

5. 参考文献


[1] 岡村・西村「ネットワークにおける多種流問題に関する一考察」土木学会関西支部年次学術講演会概要 昭和53年
[2] Okamura H. and Seymour P.D. Multicommodity flows in planar graphs, J. Combinatorial Theory Ser. B に予定