

圧密現象における固有値問題の数値解析とその応用

京都大学工学部 正 員 田村 武

京都大学工学部 学生員 の佐藤隆宏

1 序

多次元圧密における固有値問題は、BiotやMandelの予によって進められてきたが、Biotの圧密方程式¹⁾を直接に解いているために、その解は非常に複雑である。そこで本研究では、Biotの方程式に有限要素法を適用しながら、圧密の最終状態を基準にとって、Biotの方程式から変位を消去したあと、これに固有値問題を適用して、Biotの方程式の数値解析を行う。

2 有限要素法を用いた多次元圧密における固有値問題

有限要素法を適用すれば、Biotの多次元圧密方程式は、(1)式のように定式化される²⁾。(1)式において、 K ：全体剛性マトリックス、 u ：節点変位ベクトル、 u_e ：間げき水圧ベクトル、 L ：間げき水圧を節点力に変換するベクトル、 f ：節点力ベクトル、 V ：要素の体積変化ベクトル、 L^T ： L の転置ベクトル、 W ：要素間の排水条件を表わすマトリックス、である。ここで圧密終了時を基準にして、任意時刻の圧密状態を考えることによって、(1)式から変位ベクトルを消去すると、(2)式になる。さらに(2)式に固有値問題を適用するために、 $u = e^{-\lambda t} u_a$ を代入すると、(3)式になる。この式で、 $B = L^T K L$ である。 B 、 W は、その性質より対称行列であるが、 $W \cdot B$ は対称行列になるとはかぎらない。そこで(3)式の両辺に B^{-1} を乗ずると(4)式になる³⁾。この式において、 $C = B^{-1} B$ 、 $c = B^{-1} W B^{-1}$ である。(4)式より λ_a は行列 C の固有値であることがわかる。このように多次元圧密も、固有値問題として取り扱うことができる。

$$\begin{cases} K u + L u_e = f \\ V = L^T u \Rightarrow \dot{V} = -W u_e \end{cases} \quad (1)$$

$$L^T K L u_e = W u_e \quad (2)$$

$$\lambda_a B u_a = W u_a \quad (3)$$

$$\lambda_a c = C c \quad (4)$$

3 数値計算例

2で述べた圧密の固有値問題の数値計算例として次に示す二例について説明する。図-1に示すような二層系地盤に対して得られるGrayの解⁴⁾と本研究の解を表-1、および図-2で比較する。表-1は、Grayの解析解による固有値と数値計算による固有値を比較したものである。図-2は、上部粘土層、下部粘土層、および粘土層全体の解析解による圧密-時間曲線に対し、数値計算結果をプロットしたものである。以上の結果から、要素数が20個であるが、数値計算結果がGrayの解析解をよく近似していることがわかる。さらに表-1から、第1固有値の絶対値が他の固有値の絶対値よりもかなり小さく、圧密の進行につれて、間げき水圧の経時変化が第1固有値に大きく影響されることが推察される。つぎに、粘土地盤上の盛土幅の変化と圧密の速さの関係についての数値計算例を示す。数値計算に

用いたデータは図-3に示されるとおりである。図-4は、数値計算より求めた、載荷幅を変化させたときの圧密-時間曲線である。この図から載荷幅の増加によって初期圧密の進行が遅れることがわかる。しかし圧密の終了が近づくにつれて三本の曲線は接近する。これは、第1固有ベクトル以外の成分がすべて零に収束してしまい、圧密が第1固有ベクトルの大きさに左右されることを表わしている。したがって、初期圧密段階における圧密の速さは、載荷幅に影響されるが、圧密の終了までに要する時間は、ほとんど載荷幅に影響されない。

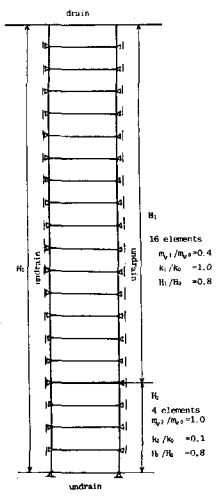


図 - 1

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
after Gray	3.1773	28.8906	81.1801	161.0361	269.8627
calculated	3.1952	28.7822	80.1479	156.8125	256.9876

表 - 1

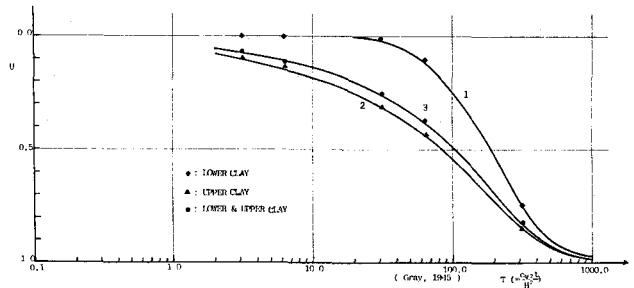


図 - 2

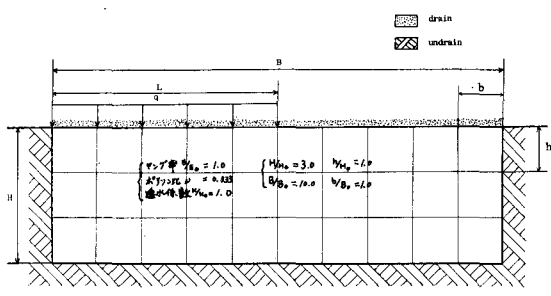


図 - 3

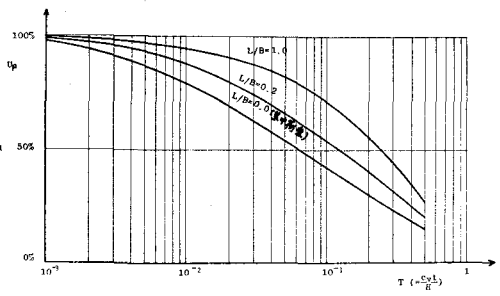


図 - 4

最後に、本研究にあたり多大の指導、助言を頂いた赤井浩一教授に深く感謝いたします。

参考文献

- 1) Biot, M. A. : General Solutions of the Equations of Elasticity and Consolidation for a Poursus Material, Journ. Appl. Mech., Trans. ASME, Vol 78, PP. 91-96, 1956
- 2) 赤井浩一, 田村 武 : 弾塑性構成式による多次元圧密の数値解析, 土木学会論文報告集, 第 269 号, PP. 95-104, 1978
- 3) 宮武 修, 加藤祐輔 : 固有値問題, 楳書店, 1971
- 4) 最上武雄編 : 土質力学, 技報堂, PP. 333-339, 1969