構造物に働く波力に関する有限要素法解析

大阪市立大学工学部　正員　倉田克彦

はじめに

構造物に働く波力に関する研究には，Morisonらにならって実験的に（仮想）質量係数および抗力係数を求める方法，あるいは種々の数学的手法を駆使して理論的に求める方法が一般に用いられている。理論的な研究の例として，MacCamy and Fuchs による鉛直円柱への回折問題の適用が，また，任意形状の構造物に対する井島によるグリーン函数を用いた解析手法が挙げられる。これらの実験的あるいは理論的な研究においては，波は微小振幅波として取扱われることが多く，有限振幅波として取扱われているものは数少ないが，例えば山口によるものがある。

一般の解析的手法によると有限振幅波の近似度を高めるにしたがって，考えるべき項の数が急激に増加し，また，水深，構造物の形状等を任意に与えた場合には，解を得ることが非常に困難になってくる。したがって，実用上の取扱いの容易さを考慮して，解析解に比して，少しは厳密性は劣る場合もあるが，比較的取扱いが容易な数値解析の一手法である有限要素法を用いて構造物に働く波力の解析をおこなった。

有限要素法による解析

一様水深hの水平な水底面Γ_Bより水面（波面）Γ_S上まで直立した円柱（鉛直壁面をΓ_Cとする）に，周期T，波長L，波高Hなる波が入射する場合，円柱に働く波力Fを求めることを考える。入射波，円柱からの散乱波およびそれらが重なり合った波が満足すべき方程式および境界条件は次のとおりである。但し，水粒子は非回転運動をしており水の粘性，圧縮性は無視する。速度ポテンシャルをϕ，境界において外向きに立てた法線をnとすれば，

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0 \qquad \text{in } \Omega \tag{1}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=0 \qquad \text{on } \Gamma_B,\ z=-h \text{ および on } \Gamma_C,\ r=D/2 \tag{2}$$

$$\eta+\frac{1}{2g}\left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right\}+\frac{1}{g}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0 \qquad \text{on } \Gamma_S,\ z=\eta \tag{3}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=\frac{\partial\phi}{\partial z}-\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} \qquad \text{on } \Gamma_S,\ z=\eta \tag{4}$$

が得られる。さらに無限遠方における放射条件（radiation condition）を導入すれば

$$\phi \propto \frac{1}{\sqrt{r}} \cdot \psi \cdot \sin(kr - \sigma t + \varepsilon) \qquad \text{on } \Gamma_\infty, \quad r \to r_\infty \tag{5}$$

上記の各式を束縛条件（あるいは自然条件）とするような汎函数Πは，境界面Γ_B, Γ_C, Γ_S, Γ_∞によって囲まれた領域Ωにおいて，次式のように表わされる。

$$\Pi = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\iiint_\Omega \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 \right\} dV \right.$$
$$\left. + \iint_{\Gamma_S} \left\{ \frac{g}{2} \eta^2 - [\phi]_{z=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\} dS - \iint_{\Gamma_\infty} \phi \cdot \lambda_\infty dS \right] \tag{6}$$

ここで

$$\lambda_\infty = \left[\frac{\partial \phi}{\partial n}\right]_{r \to r_\infty} \tag{7}$$

四面体要素によって領域Ωを分割し，各要素毎に求めた要素汎函数を領域全体について加え合わせて，汎函数Πを停留させれば速度ポテンシャルφの余弦波および正弦波成分ϕ^cおよびϕ^sについて，次式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} [\phi^c]^T \\ [\phi^s]^T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A]_{\Omega+\Gamma_S+\Gamma_\infty} & [B]_{\Gamma_\infty} \\ -[B]_{\Gamma_\infty} & [A]_{\Omega+\Gamma_S+\Gamma_\infty} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{f^c\}_{\Gamma_\infty} \\ \{f^s\}_{\Gamma_\infty} \end{Bmatrix} \tag{8}$$

波を微小振幅波および有限振幅波のストークスの第2次近似解とした場合についての計算結果と解析解（MacCamy & Fuchs あるいは山口による解）との比較をおこなって有限要素法による解析の精度を調べた。

解析の結果

計算の結果によれば，波が微小振幅波のとき，$D/L = 0.02 \sim 1.0$の範囲において，

$$r_\infty / D \geq 1.5, \qquad \Delta\theta \leq \pi/12, \qquad z\text{方向には2分割以上}$$

であれば，有限要素法解析による結果と解析解との差は0.1以下（5%以下）である。有限振幅波の場合については講演時に発表する。