

流体を含む粒子流の流動機構に関する研究(2)

立命館大学理工学部 正 員 大同 淳之

立命館大学大学院 学生員 加藤 一平

1 はしき Newton流体を含む粒子流のせん断機構に関し、Bagnold⁽¹⁾は、せん断力と法線応力 P との関係として $\tau = P \tan \alpha$ として、粒子の慣性が卓越する領域に対して $P = K \sigma (\lambda D)^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \cos \alpha$ 、流体の粘性が卓越する領域に対して $\tau = \beta \lambda^{\frac{2}{3}} \eta_0 \frac{du}{dy}$ を提案した。ここで、 K, β ; 係数、 σ ; 粒子密度、 D ; 粒子径、 λ ; 線濃度、 α ; 粒子衝突角、 η_0 ; 流体の粘度。前報⁽²⁾では、二重円筒型回転粘度計を用いて粒子流のせん断試験を行い、これらの流動式を検討した。その結果、Bagnoldの理論に基づいた場合、粒径、濃度および流動層厚の変化に伴って、係数や限界 Reynolds 数が変化することを得た。これは、Bagnoldのモデルが粒子流の流動機構を十分に説明し得ていないものと思われる。本報では、粒子存在の影響、特に粒子の回転や接触さすの影響を考慮し、粒子流の流動機構を検討する。

2 基礎方程式 粒子流を流体相と粒子相からなる二相流として取り扱い、その重ね合わせが成立するものとする。まず、次の仮定を行う。(i) 粒子は均一剛体球であり、質量を m 、粒径を D とする。(ii) 粒子は流体力の作用を受けると。(iii) 粒子の運動はその履歴に関係しない。(iv) 外力のする仕事は運動エネルギーの増加に用いられ、後完全に散逸される。次に、粒子流の基礎方程式として、連続方程式、運動方程式および角運動方程式を与える。

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{--- (1)} \quad \rho \frac{du_i}{dt} = \rho b_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} \quad \text{--- (2)} \quad I \frac{dW_{ij}}{dt} = \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} \quad \text{--- (3)}$$

ここで、 ρ ; 混合密度、 b_i ; 体積力、 σ_{ij} ; 応力テンソル、 W_{ij} ; 粒子の回転速度テンソル、 I ; 単位体積当りの慣性モーメント。さらに、エネルギー保存則として次式を与える。

$$\frac{d}{dt} [K + U] = \dot{Q} + \dot{W} \quad \text{--- (4)}$$

$$K = \int_V \left[\frac{1}{2} \rho u_i u_i + \frac{1}{4} I W_{ij} W_{ij} \right] dV \quad \text{--- (5)} \quad U = \int_V \rho \epsilon dV \quad \text{--- (6)}$$

$$\dot{Q} = \int_V \rho \dot{\epsilon} dV - \int_S h_i n_i ds \quad \text{--- (7)} \quad \dot{W} = \int_V \rho b_i u_i dV + \int_S \sigma_{ij} n_j u_i ds \quad \text{--- (8)}$$

ここで、 K ; 運動エネルギー、 U ; 内部エネルギー、 $\dot{Q}$; 吸収熱量、 $\dot{W}$; 外力のする仕事、 ϵ ; エネルギー密度、 $\rho \dot{\epsilon}$; 熱わき出し、 h_i ; 熱流束、 n_j ; 面積要素 ds の単位法線ベクトル。上記の仮定を用い、これらの関係より散逸エネルギー $\dot{\epsilon}$ を求めると次式を得る。

$$\dot{\epsilon} = \sigma_{ij}^p D_{ij} + \sigma_{ij}^A R_{ij} \quad \left[\because \sigma_{ij}^p = \sigma_{ij}^s - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk}, R_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^A - W_{ij} \right] \quad \text{--- (9)}$$

ここで、 σ_{ij}^p ; 偏差応力、 $D_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^s$; 変位速度テンソル、 R_{ij} ; 独立回転速度、 S はテンソルの対称化、 A は交代化を表わす。

3 粒子流の流動式 図1に示すような中心距離 bD だけ離れて運動している粒子を考える。一般に、流体相の散逸エネルギーは $\dot{\epsilon} = \sigma_{ij}^p D_{ij}$ で与えられる。粘性流体の偏差応力は $\sigma_{ij}^p = \partial \dot{\epsilon} / \partial D_{ij} = 2 \eta_r \eta_0$ として求める。ここで、相対粘度は $\eta_r = 1 + D/s$ として与えられる。次の構成方程式を得る。

$$\sigma_{ij} = -P \delta_{ij} + 2(1 + \lambda) \eta_0 D_{ij} \quad \text{--- (10)}$$

一方、粒子は $u_i^* = u_i + kbD \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ 、 $W_{ij}^* = W_{ij}$ の速度で運動しているものとする。接触点 ($s=0$) における相対速度 u_i は $u_i =$

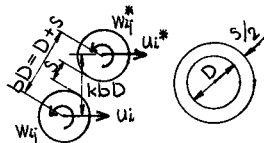


図1

図2

$(u_i^* - \frac{1}{2}kD\dot{W}_{ij}) - (u_i + \frac{1}{2}kD\dot{W}_{ij}) = kD(\dot{D}_{ij} + R_{ij})$ とする。さらに不規則性を考慮して2乗平均をとると $\overline{u^2} = kD\sqrt{\dot{D}_{ij}\dot{D}_{ij} + R_{ij}R_{ij}} = kDG$ を得る。次に、接触力 f_k ($k=1 \sim N$) による圧縮率 γ の仮想仕事を考え、これが圧力 P による粒子実質部分の仮想仕事に等しいとすると $\sum \frac{f_k}{\pi D^2} \times \gamma \times \frac{\pi}{6} D^3 \times \frac{\rho}{m} = \frac{1}{6} N \bar{f} \frac{\rho}{m} D \gamma = C P \gamma$ より $\bar{f} = \frac{6mC}{N\rho D} P$ を得る。したがって、まさら係数を μ とすると単位体積中の散逸エネルギー Φ_s は $\Phi_s = \frac{1}{2} \sum \mu f_k \overline{u^2} \frac{\rho}{m} = 3k\mu C P G$ とする。ここで用いる圧力には、静的な圧力と粒子の衝突による動的な圧力 P' が含まれる。 P' は、図2に示す球の壁面に働く圧力に等しいとして、運動量の伝達より $P' = 2m\overline{u^2} \frac{1}{\pi (bD)^2} = \frac{1}{3} k^2 \lambda \sigma D^2 G^2$ として求まる。これより、動的な圧力による散逸エネルギーは

$$\Phi_s = k^3 \mu C \lambda \sigma D^2 G^3 \quad \text{--- (11) ---} \quad \text{とる。 (9) 式より } \sigma_{ij}^D \text{ および } \sigma_{ij}^A \text{ を求めると、}$$

$$\sigma_{ij}^D = \frac{1}{3} \frac{\partial \Phi_s}{\partial \dot{D}_{ij}} = k^3 \mu C \lambda \sigma D^2 G \dot{D}_{ij} \quad \text{--- (12) ---}, \quad \sigma_{ij}^A = \frac{1}{3} \frac{\partial \Phi_s}{\partial R_{ij}} = k^3 \mu C \lambda \sigma D^2 G R_{ij} \quad \text{--- (13) ---}$$

さらに、流体相の応力と重ね合わせ $u_i = u_i(\mathbf{x})$, $\dot{W}_{ij} = \omega$ なる流れの場に適用すると

$$\sigma_{\alpha\beta} = -P + \frac{1}{6} k^2 \lambda \sigma D^2 \left(\frac{du_\alpha}{d\mathbf{x}} \right)^2 \quad \text{--- (12) ---} \quad \text{(for } R_{ij} = 0 \text{)}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta} + (1 + \lambda) \eta_0 \frac{du_\alpha}{d\mathbf{x}} + \frac{1}{6} k^2 \lambda \sigma D^2 \left(\frac{du_\alpha}{d\mathbf{x}} \right)^2 \tan \theta \quad \text{--- (13) ---}$$

$$\tan \theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} k \mu C \quad \text{--- (14) ---} \quad \tau_{\alpha\beta} = C' + (-p) \tan \theta \quad \text{--- (15) ---}$$

これらの流動式は、Bagnoldの求めたものと類似しているが、粒子の回転や接触まさらの影響が考慮された。これより粒子が回転すると係数が減少し、一方 $\tan \theta$ は内部まさら角に対応し粒子のまさら係数や濃度に関係する。また、せん断降伏値は粘性成分 C' を考慮するとCoulomb型で示される。図3, 4にせん断力実測値に対するBagnoldの式と(13)式との比較を示す。これより粘性および慣性領域とくに(13)式に比較的良好に一致している。ただし、粒径毎の係数の違いは、流動層厚の違いによる k などの変化によるものであると予想される。

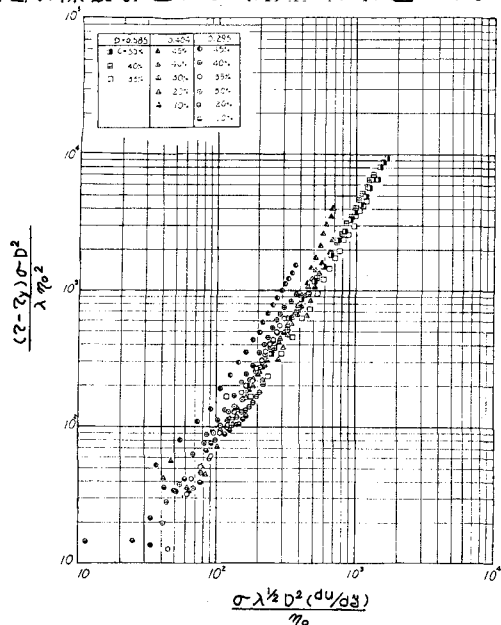


図3 Bagnoldによる無次元表示

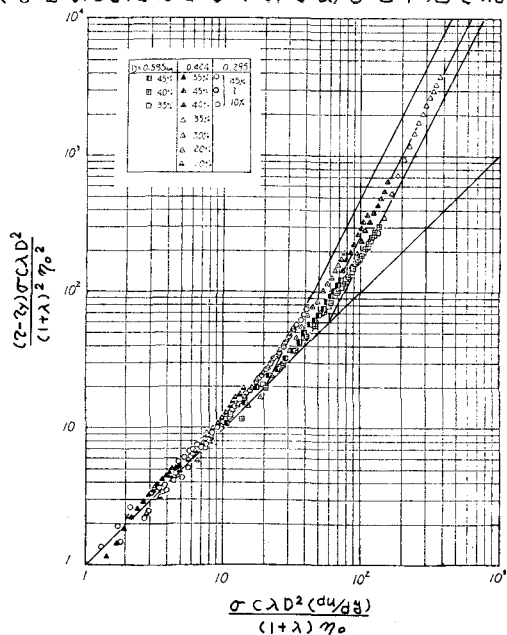


図4 (13)式による無次元表示

- 参考文献 (1) R.A. Bagnold; Proc. Roy. Soc. A, Vol 225, 1954, P.P. 49~63
 (2) 大同・加藤; 土木学会 第33回年次学術講演会講演概要集, 1978, P.P. 580~581