

河床波の統計的性質について

京都大学工学部 正員 中川 博 次
 京都大学工学部 正員 辻 本 哲 郎
 京都大学大学院 学生員 ○松 田 潤一郎

1. まえがき 河床波の統計的性質はそのスペクトル構造を中心として多くの研究者により調べられ、その河床波形成機構解明あるいは河床波を中心とした移動床過程の説明・予測への応用が期待されている。しかし、こうした応用面での研究はまだほとんど進んでおらず、河床波の統計的性質の更製、モデルの模索の段階に停まっている。

河床波の統計的性質の移動床過程の諸問題への応用の対象としては、*dune beds*での流砂量推定¹⁾あるいはその砂粒群の分散過程の把握、河床波の形状抵抗の推定等が考えられる。さらに著者ら²⁾すでに試みているような河床波の発達、崩壊過程の説明^{2),3)}への適用である。これらはいずれも河床の場所的、時間的変動を表わす確率過程としてよりも個々の波の連なりと考えると具体的なモデルから検討されている。この両者をつなぐものとして、零交叉又は閾値交叉問題に対する確率過程論の成果が利用される。³⁾しかし実際問題に適用する上では不十分な面も有い。そこで本研究では河床形状を河床高の連なりとして考え、解析されるスペクトル等のフーリエと河床波の個々の波の連なりと考えると場合との関連を明らかにする基礎として数値模擬を利用した考察を行う。

2. ある定まった波長分布に従う波列からなる不規則過程 まず、波長分布を既知とし、一波長の間が正弦波にモデル化された河床波の連なりによる河床形状モデルを考える。いま、著者らの実験結果²⁾より各波の波形勾配⁽¹⁾は等しいものとする。モデル化された河床波の一波長に着目すると、その波の原点を $x=0$ として一波長内の河床高 $y(x)$ は次式で与えられる。
$$y(x) = (0L_i/2) \sin(2\pi x/L_i) \quad \text{----- (1)}$$
ここで L_i はいま考えている波の波長である。この一波長分について考えると、河床高の n 次モーメントは次式で計算できる。
$$E\{y(x)^n\} = \frac{1}{L_i} \int_0^{L_i} \left(\frac{0L_i}{2}\right)^n \sin^n\left(\frac{2\pi x}{L_i}\right) dx$$
$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{0L_i}{2}\right)^n \int_0^{2\pi} \sin^n \psi d\psi = \begin{cases} 0 & (n: \text{odd number}) \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} \left(\frac{0L_i}{2}\right)^n & (n: \text{even number}) \end{cases} \quad \text{----- (2)}$$
但し、 $n!! = \begin{cases} n(n-2)\cdots 3 \cdot 1 & (n: \text{odd}) \\ n(n-2)\cdots 4 \cdot 2 & (n: \text{even}) \end{cases}$ である。

式(2)は一波長についての河床高のモーメントを表わしており、波長分布が与えられると河床全体の $y(x)$ のモーメントが次のように計算できる。河床の対象区間長を L_b 、河床縦断形状の刻み幅を Δx として河床高の n 次モーメントを表わすと、

$$E\{y(x)^n\} = \sum_{i=1}^N E\{y(x)^n\}_i (L_i/\Delta x) \cdot (L_b/L) \text{prob}[L=L_i] / (L_b/\Delta x) = \sum_{i=1}^N E\{y(x)^n\}_i \cdot (L_i/L) \cdot \text{prob}[L=L_i] \quad \text{----- (3)}$$

ここに N は波長分布のヒストグラムのクラス数、 L は平均波長である。上式に式(2)を代入し、平均波長で標準化された波長の確率密度関数 $f_L(\xi)$ を導入すると、各波について波形勾配⁽¹⁾が一定という条件のもとでは、 $y(x)$ の n 次モーメントは次式で与えられることになる。
$$E\{y(x)^n\}/\bar{H} = \begin{cases} 0 & (n: \text{odd}) \\ \frac{((n-1)!!)/(2^n n!!)}{\int_0^\infty \xi^{n+1} f_L(\xi) d\xi} \cdot \int_0^\infty \xi^{n+1} f_L(\xi) d\xi & (n: \text{even}) \end{cases} \quad \text{----- (4)}$$
ここで $\bar{H}$ は平均波高である。

著者の実験及び理論的考察によると、波長分布は shape parameter r が4~6程度の gamma 分布で良く表示することができ³⁾、その標準化された確率密度関数 $f_L(\xi)$ 及び、 n 次モーメントは次のように与えられる。

$$f_L(\xi) = (r/\Gamma(r)) \cdot (r\xi)^{r-1} \exp(-r\xi) \quad \text{----- (5)} \quad \int_0^\infty \xi^m f_L(\xi) d\xi = \Gamma(r+m)/(\Gamma(r)) \quad \text{----- (6)}$$

従って m が偶数の場合の河床高の n 次モーメントは
$$E\{y(x)^n\}/\bar{H} = ((n-1)!! \cdot \Gamma(r+n+1)) / (2^n n!! \Gamma(r)) \quad \text{----- (7)}$$
 となる。 $n=2$ の場合は河床高の分散

$$\sigma_y^2 \text{ が求められ、} \sigma_y^2 = \bar{H}^2 \cdot \Gamma(r+3) / (8r^3 \Gamma(r)) \quad \text{----- (8)} \quad \bar{H}/\sigma_y = 2\sqrt{2} \cdot r \cdot \sqrt{\Gamma(r)} / \Gamma(r+3) \quad \text{----- (9)}$$

が得られる。skewness は零となり、一方 kurtosis は次のように求められる。
$$k_r = E[y^4] / (E[y^2])^2 = \frac{3}{2} r \Gamma(r+5) \cdot \Gamma(r) / (\Gamma(r+3))^2 \quad \text{----- (10)}$$
 式(9)、(10)の挙動は r を変数として図-1に示してある。とくに、式(9)の結果 r が4~6では平均波高が河床高標準偏差の約2倍になるとが理論的に示され、従来実験的に認められていた事実と一致した(図-2)。以上個々の波を配列したモデル河床

を河床高系列とみなした時の統計的静特性を
検討した。動特性は解析的には求め難く、数値模
擬によって調べることにした。まず、既定の分布に
従う波長を次々に並べ、この間を正弦波で表現し、適当
な刻み幅で離散化した河床高データ $\{y_j\}$ を求めた。
すなわち $[0, 1]$ の区間で一様乱数 $\{\varepsilon_i\}$ を発生させ、
分布関数の $F_L(\xi)$ である波長 $\{l_i\}$ を次のように求めた。

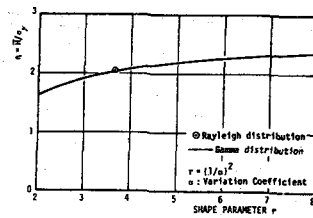


図-1 (a)

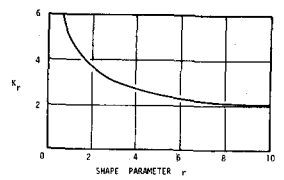


図-1 (b)

$z_i = F_L^{-1}(\varepsilon_i) \quad (i=1, 2, 3, \dots, M)$ いま $F_L(\xi)$ とは正規化された波長の分布
関数を用いることとし、gamma分布のそれを用いた。こうした波長列 $\{l_i\}$ をもとに次のように
河床高 $\{y_j\}$ を求められる。 $y(x) = \frac{\theta z_i}{2} \sin \frac{2\pi(x-s_i)}{z_i} \quad (s_{i-1} \leq x \leq s_i) \quad (11) \quad s_i = \sum_{j=1}^{i-1} z_j$
上述の手順で実際に数値模擬を行ない、得られたモデル河床の砂面高の波数スペクトル
を求めた。従来の研究²⁾の結果から、 θ としは 0.04, 0.06, 0.08 の 3 種、 r としは 4, 5 の 2
種類について行い、スペクトル解析は F.F.T. によした。こうして計算された
波数スペクトルの一例が図-3に示される。図によると、得られたスペクトルの高波数
域での減衰特性は波数の $-4 \sim -5$ 乗程度となっており、河床波のそれ (-3 乗
則⁴⁾) と比較するとかなり急激であり、上述した河床モデルはそのスペクトル特
性については実際と異なる性質を有すると判断される。

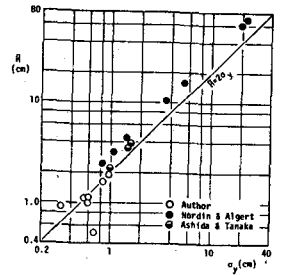


図-2

3. 副次的な雑音波の効果についての検討 前章で得た河床モ
デルを波の配列とまじりにスペクトル特性を実際のものに近づけるため、先の
モデルに雑音波を重ね合わせた場合の効果について検討した。すなわち、前
章で得られた模擬データを y_m とし、雑音波を y_n を加えて新しい模擬デ
ータ y_m' を作成する。 y_n' としは平均値零の一様分布からなる白色雑音を考え、
その強度とものと正弦波の振幅との比を α_m とし、これをパラメータとして最適パ
ラメータを前記錯誤により決めた。すなわち、 $[0, 1]$ において一様乱数 $\{\varepsilon_i\}$ を
発生させ、次式により y_n' を与えた。 $y_n' = \alpha_m \theta (\varepsilon_i - \frac{1}{2}) \quad (12)$ こうした雑
音波を重ね合わせは模擬データの統計的性質のうち静特性に与える影響は

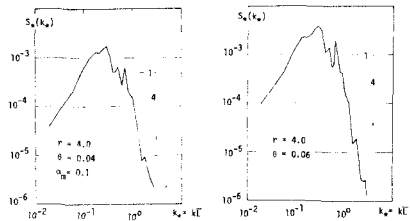


図-3

ないものと考えられる。上述の方法により得られた模擬データの波数スペクトル
を計算した例が図-4に示される。図からわかるように α_m の増加により、波
数スペクトルの高波数域での減衰性状が緩やかになり、 $\alpha_m = 0.5$ 程度で
ほぼ -3 乗則⁴⁾ が出現するようである。この結果、実際の河床波では、波長分
布で規定される巨視的な不規則性状があり、その内部は相似な波から
成り立っているものの微視的には平均波長の半分程度の全くランダムな不規則性
状が含まれているものと予想される。

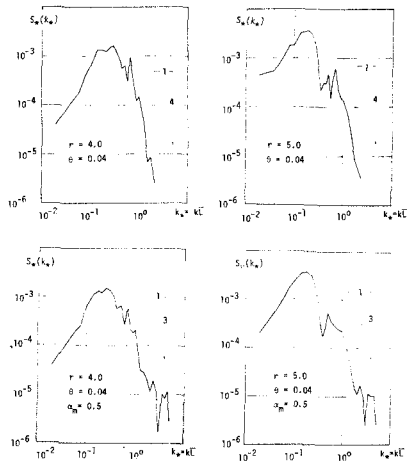


図-4

4. あとがき 河床形状の不規則性は波長分布に代表される比較的規則的なそれと、それに重ね合わせた形の全くラン
ダムなそれとがある割合で複合されたものであることが明らかにされた。なお、3章の結果スペクトルの高波数域での減衰性状は
必ずしも波長分布だけでなく副次的な雑音波の影響を受けていることが類推された。この点については著者らのスペクトルモデルとの関
連を検討中である。(参考文献) 1) 中川 辻本 矢田: 昭53 土木学会年報, 1978, 2) 中川 辻本: 京大防災研年報, 1976, 3) 中川 辻本 矢田: 京大防災研年報, 1978, 4) Hino: Jour. of Fluid Mech., 1968