

特性曲線法による平面二次元流れの数値解析

京都大学工学部 正 員 岩佐 義朗
 建設省 正 員 足立 敏之
 京都大学大学院 学生員 ○吉田 英信

1. はじめに 本報は、これまで一次元不定流解析にしばしば適用されてきた特性曲線法を平面二次元流れの場合に拡張するとともに、琵琶湖南湖を対象として特性曲線法による湖流の解析を行ない、その適用性を明らかにしようとしたものである。

2. 基礎式およびその特性曲線表示 ここでは前報と同様に二次元一層モデルを適用するものとする(図1)。すなわち、

$$\text{連続式: } L_1 \equiv \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial D}{\partial x} + v \frac{\partial D}{\partial y} + D \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\text{運動方程式: } L_2 \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - A_x = 0 \quad (2)$$

$$L_3 \equiv \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - A_y = 0 \quad (3)$$

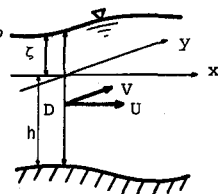


図 1

である。ただし、記号は図1に示すとおりで、 A_x, A_y はそれぞれx, y方向の外力項であり、前報と同様の表示によることとする。つぎに基礎式の特性曲線表示を行なうにあたり、基礎式をつぎのように行列表示する。すなわち、

$$L \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \begin{pmatrix} u & D & 0 \\ g & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \begin{pmatrix} v & 0 & D \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \begin{pmatrix} u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \\ -A_x \\ -A_y \end{pmatrix} = 0 \quad (4)$$

である。便宜上、 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T = (\zeta, u, v)^T$ なるベクトル表示を用いている。ここで、 $C: \phi(x, y, t) = 0$ なる曲面上で $\mathbf{u}$ の値が初期値として与えられているとすると、 $L[\mathbf{u}]$ に ϕ_t を乗じ若干の式の変形を加えることにより、

$$\phi_t L[\mathbf{u}] = A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + B = 0 \quad (5)$$

がえられる。ただし、 B は曲面 C 上の内微分よりなるベクトルであり、また、行列 A ;

$$A = \begin{pmatrix} \phi_t + u \phi_x + v \phi_y & D \phi_x & D \phi_y \\ g \phi_x & \phi_t + u \phi_x + v \phi_y & 0 \\ g \phi_y & 0 & \phi_t + u \phi_x + v \phi_y \end{pmatrix} \quad (6)$$

は特性行列とよばれる。 $|A| \neq 0$ ならば式(5)によって $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ が一意的に決せられ、またその結果 $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ および $\frac{\partial u}{\partial t}$ も一意的に決せられる。一方、 $|A| = 0$ の場合は $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ が一意的に決定されず、 $\phi = 0$ が特性曲面となる。このとき、($C = \sqrt{gD}$ を導入)

$$|A| = (\phi_t + u \phi_x + v \phi_y) \{ (\phi_t + u \phi_x + v \phi_y)^2 - C^2 (\phi_x^2 + \phi_y^2) \} = 0 \quad (7)$$

より、特性曲面として以下の2つの型をもつことが知られる。

$$(i) \text{第1種特性曲面: } (\phi_t + u \phi_x + v \phi_y)^2 - C^2 (\phi_x^2 + \phi_y^2) = 0 \quad (8)$$

この場合、Mongeの錐を考えることにより、

$$\left(\frac{dx}{dt} - u \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - v \right)^2 = C^2 \quad (9)$$

がえられる。特性曲面は図2のような擬円錐となる。

$$(ii) \text{第2種特性曲面: } \phi_t + u \phi_x + v \phi_y = 0 \quad (10)$$

この場合特性曲面はMongeの束を形成し、その軸は流線ベクトルである(図3)。

つぎに、 $|A| = 0$ のときは $L A = 0$ を満足するベクトル $L (\neq 0)$ が存在する。すなわち、

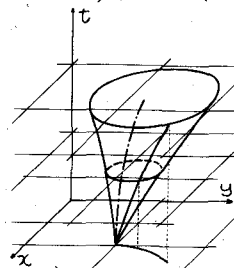
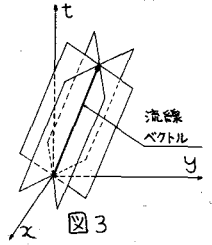


図 2

(i) 第1種特性曲面について: ベクトル ℓ として, $\ell = (1, \frac{C}{g} \cos \theta, \frac{C}{g} \sin \theta)$ がえられる (ただし, θ は ℓ を xy -平面に投影したベクトルが x 軸となす角である)。そして, 式(4)を ℓ によって線型結合した $\ell L[u] = 0$ が,

$$\frac{Dz}{Dt} + \frac{C}{g} \cos \theta \frac{Du}{Dt} + \frac{C}{g} \sin \theta \frac{Dv}{Dt} = \frac{C}{g} (A_x \cos \theta + A_y \sin \theta) - (u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y}) + \frac{C^2}{g} (\sin \theta \frac{Du}{D\theta} - \cos \theta \frac{Dv}{D\theta}) \quad (11)$$

のようにえられる。ここで, $\frac{Dz}{Dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + (u + C \cos \theta) \frac{\partial z}{\partial x} + (v + C \sin \theta) \frac{\partial z}{\partial y}$ および $\frac{D\theta}{Dt} = -\sin \theta \frac{\partial z}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial z}{\partial y}$ であり, とともに第1種特性曲面上の微分である。



(ii) 第2種特性曲面について: ベクトル ℓ として, $\ell = (0, -\sin \theta', \cos \theta')$ がえられる。ここで, θ' は曲面 $z=0$ 上にたてた法線ベクトルを xy -平面に投影したベクトル (ϕ_x, ϕ_y) が x 軸となす角である。微分演算子 $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$ および $\frac{D\theta'}{Dt} = -\sin \theta' \frac{\partial z}{\partial x} + \cos \theta' \frac{\partial z}{\partial y}$ を用いることにより, $\ell L[u] = 0$ は,

$$-\sin \theta' \frac{\partial u}{\partial t} + \cos \theta' \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{Dz}{D\theta'} + A_x \sin \theta' - A_y \cos \theta' = 0 \quad (12)$$

となる。式(12)もまた第2種特性曲面上の内微分のみで構成されていることがわかる。

3. 基礎式の差分化 ここでは波面の接線方向の微分 $\frac{D}{D\theta}$ を消去するため, $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ の4方向の第1種特性曲線に沿って式(11)を差分化し, また第2種特性曲面内の関係式(12)は用いず連続式(1)を差分化する方法をとった²⁾(図4)。すなわち,

$$(z_p - z_R) - \frac{C}{g} (u_p - u_R) = \left[-\frac{C}{g} A_x - (u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y}) - \frac{C^2}{g} \frac{\partial v}{\partial y} \right] \Delta t$$

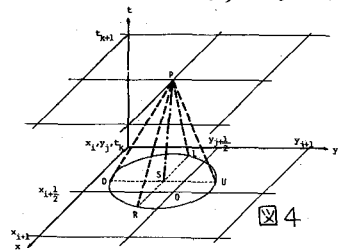
$$(z_p - z_U) - \frac{C}{g} (v_p - v_U) = \left[-\frac{C}{g} A_y - (u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y}) - \frac{C^2}{g} \frac{\partial u}{\partial x} \right] \Delta t$$

$$(z_p - z_L) + \frac{C}{g} (u_p - u_L) = \left[\frac{C}{g} A_x - (u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y}) - \frac{C^2}{g} \frac{\partial v}{\partial y} \right] \Delta t$$

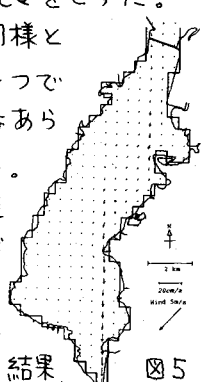
$$(z_p - z_S) + \frac{C}{g} (v_p - v_S) = \left[\frac{C}{g} A_y - (u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y}) - \frac{C^2}{g} \frac{\partial u}{\partial x} \right] \Delta t$$

$$\text{および, } (z_p - z_s) = \left[-\frac{C^2}{g} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - (u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y}) \right] \Delta t$$

であり, 添字は図4の各点における値であることを示している。ここで必要となる点R, U, L, D, Sにおける値はまわりの格子点における値から内挿して求められる。流速に関しては水量の連続性を保つため流量フラックスで内挿し再び流速に変換する手続きをとった。



4. 琵琶湖南湖への適用 格子分割, 境界条件その他については前報と同様とした。また時間ステップは15秒としている。琵琶湖南湖での卓越風向の一つである北東風の場合の流速ベクトル図が図5である。前報でみられた環流はありわれず, 南端での流速が直接その真北の点に伝わりていく傾向がみられる。これらの原因については, 差分式が流速を一方方向に保持しやすい点や, 差分式中に数値拡散項が含まれることなどが考えられるが詳細はなお検討が必要とされる。



5. おわりに 特性曲線法による平面二次元流れの解析は一応可能になったが, 二次元流れの場合は特性曲面上の2つ以上の方向の微分が含まれる結果, 理論的にもあるいは数値計算に適用する場合にも, 一次元流れの場合と比べ多くの障害が生じるといえる。今後これらの点についてさらに詳しく検討を進めたい。

《参考文献》 1) 岩佐, 井上, 片山, 第32回年講 II-139, 1977 2) J.M. Townson: An application of the method of characteristics to tidal calculations in (x, y, t) space, Jour. of Hydraul. Res. IAHR, Vol. 12, 1974