

土木構造物のカタストロフィーと初期不整の鋭敏性について

京都大学	正 員	丹羽 義次
京都大学	正 員	渡辺 英一
青木建設	正 員	○中川 昇

1. はじめに

René Thom のカタストロフィー理論が世に出てからはかなり年になるが、この位相幾何学の申し子とも言うべき理論は、土木工学の分野にどのように応用され、どのような成果をもたらすのであろうか。本研究は、これを論ずるために、主として静的安定現象における初期不整の鋭敏性と特異点のカタストロフィー写像との関係を調べるようとするものであり、自由度系および多自由度系のカタストロフィーに言及したものである。

2. 初等カタストロフィー¹⁾

一般に、系のポテンシャルエネルギー V は、コントロール空間 R^k と状態空間 R^n との直積空間 $R^k \times R^n$ から、実数集合 R への写像としてとらえることができる。

$$V(\lambda, \psi) : R^k \times R^n \rightarrow R$$

λ : コントロールパラメータ

ψ : 一般化座標

系の平衡空間 M_V とは、コントロールパラメータを固定したとき、 V が ψ に関して停留値をとるような R^{k+n} の部分空間として定義される。

$$M_V = \left\{ (\lambda, \psi) \mid \frac{\partial V}{\partial \psi_k} = 0 : k=1, 2, \dots, n \right\}$$

カタストロフィーとは、 M_V においてコントロールパラメータを連続的に変化させると、一般化座標の変化に不連続性が生ず

ることである。 M_V は R^k に射影する写像とカタストロフィー写像と呼ばれる。カタストロフィーの特性は、 M_V の特異点のカタストロフィー写像により、決定される。Thom の定理では、コントロールパラメータの数 k 4 以下の場合、いかなる系とも、くまなく、その系のカタストロフィーは、Fold (折り目), Cusp (くさび), Swallow Tail (つばめの尾), Butterfly (蝶), Hyperbolic Umbilic (双曲的へそ), Elliptic Umbilic (楕円的へそ), Parabolic Umbilic (放物的へそ) の 6 つの初等カタストロフィーのどれかと微分位相同型、すなわち本質的に同じものであることが示されている。

なお、Cusp, Butterfly, Parabolic Umbilic については、それぞれ α Dual (双対) カタストロフィーが存在する。双対カタストロフィーは、位相幾何学的にはなにか新しい意義ともてないが、工学的には重要な意味とも、くいる。

3. 土木構造物のカタストロフィー²⁾

土木構造物のポテンシャルエネルギーにおいて、荷重パラメータがコントロールパラメータになることはいくは、誰も異存のないところであろう。それは、荷重パラメータの他にコントロールパラメータに相当するものは存在しないのであろうか。

一般に初期変形の存在する問題については、初期変形を 0 にあて、それに相当するモーメントなどの荷重値を加えることにより、初めの問題と同等なものになることが知られている。すなわち、初期変形や残留応力などの

Imperfections (初期不整) は、系に作用している荷重とは独立の荷重パラメータとして取り扱うことのできるものである。したがって、土木構造物のポテンシャルエネルギーにおけるコントロールパラメータは、系に作用している荷重パラメータ Λ^0 、および Imperfection パラメータ $\Lambda^1, \Lambda^2, \dots, \Lambda^e$ による、と構成される。

土木構造物の平衡空間における特異点の集合は、Critical Points [$\det(\partial^2 V / \partial u_i \partial u_j) = 0$] の集合であり、そのカタストロフ写像は、弾性限度内における系の耐荷力 Λ^M と $\Lambda^1, \Lambda^2, \dots, \Lambda^e$ との関係を示すものである。この Imperfection Sensitivity (初期不整の鋭敏性) と呼ばれているものである。

これまで、静的弾性不安定現象の性質は、Imperfections の存在しない系における Critical Point の性質によって分類されてきた。ここにカタストロフ理論を導入することは、視点の転換であり、静的弾性不安定現象を、Imperfection Sensitivity という現実的なファクターでとらえることになる。

4. 結論および数値計算結果

土木構造物における基本的なカタストロフは、Fold, Cusp, Dual Cusp の3種であり、Hyperbolic Umbilic は Fold と Dual Cusp の連成として、Elliptic Umbilic は Fold と Cusp の連成として取り扱うことのできる。

Fig-1 および Fig-2 に、2自由度モデルを示す。Fig-3 および Fig-4 は、それぞれこのモデルのカタストロフのスケッチである。 ϵ_1, ϵ_2 は、それぞれ Q_1, Q_2 のモードの初期値を示している。また、

$$K = \frac{R_2}{R_1 L^2}, \quad \Lambda = \frac{P}{R_1 L}$$

であり、添字 'C' は初期値 ϵ が存在しないときの Critical 状態を、添字 'M' は初期値 ϵ が

存在するときの Critical 状態を示している。Fig-3 のカタストロフは、(I) Dual Cusp, (II) Hyperbolic Umbilic, (III) Fold であり、Fig-4 のカタストロフは、(I) Cusp, (II) Coupled Cusp, (III) Dual Cusp である。

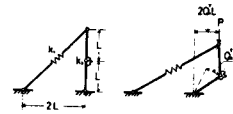


Fig-1. Model-1

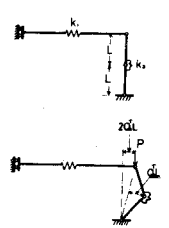


Fig-2. Model-2

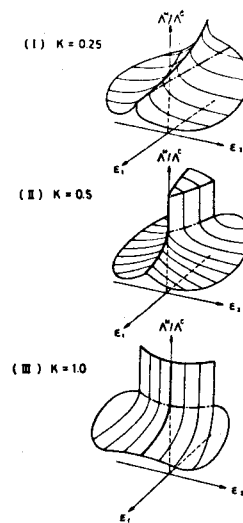


Fig-3. Catastrophe of Model-1

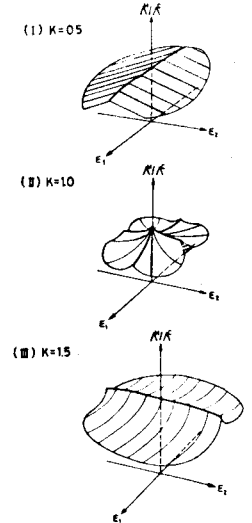


Fig-4. Catastrophe of Model-2

《参考文献》

- 1) 野口広, カタストロフ, サイエンス社, 1977.
- 2) Thompson, J.M.T. & G.W. Hunt, Towards a Unified Bifurcation Theory, ZAMP 26, 1975, pp. 581 ~ 603.