直交異方弾性体の変位関数

大阪市立大学　正員 ○堀川都志雄
大阪市立大学　正員　園田恵一郎

1.はしがき： 著者らは直交異方弾性体の弾性定数の数が5つである transversely isotropic 弾性体に物体力が作用する場合の変位関数を導き、これを用いて全周単純支持された板の解を誘導した[1]。しかしながら、このような変位関数を実際の構造物に適用する場合かなりの制約を受けることになり、より自由度の多い弾性定数を持つ変位関数を求める必要がある。本研究は、①物体力を有する直交異方弾性体の変位関数を誘導し、弾性定数間に適当な関係を持たせることによって、この変位関数は transversely isotropic 弾性体および等方弾性体におけるガラーキン・ベクトルとブーシネスクの関数に帰着することを示し、②さらに、全周単純支持された直交異方性厚板に自重および部分荷重が作用する場合の解を誘導するものである。

2.理論式： ○直交異方弾性体におけるフックの法則　○釣合式

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{xz}\\ \tau_{yz}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11},C_{12},C_{13} & & & \\ C_{12},C_{22},C_{23} & & \mathbb{O} & \\ C_{13},C_{23},C_{33} & & & \\ & C_{44} & & \\ \mathbb{O} & & C_{55} & \\ & & & C_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{Bmatrix} \qquad \text{———(1)}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+X=0,\\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+Y=0,\\ \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+Z=0\end{aligned}\right\} \text{———(2)}$$

ここで、

X, Y, Z；物体力　である。

式(1)の弾性定数は、歪エネルギーが正値であることより次のような制約を受ける。

$$C_{11}, C_{12}, \cdots, C_{66}>0\ ,\quad \begin{vmatrix}C_{11}, C_{12}\\ C_{12}, C_{22}\end{vmatrix}>0\ ,\quad \begin{vmatrix}C_{11},C_{12},C_{13}\\ C_{12},C_{22},C_{23}\\ C_{13},C_{23},C_{33}\end{vmatrix}>0\ ,\quad \cdots\cdots \text{———(3)}$$

○変位関数　式(1)と(2)からナビエーの式を得る。この式を満たす変位関数は、物体力の独立性に対応して以下のように与えられる。

$$\left[\partial_x^6+a_1\partial_x^4\partial_y^2+a_2\partial_x^4\partial_z^2+a_3\partial_x^2\partial_y^4+a_4\partial_x^2\partial_z^4+a_5\partial_x^2\partial_y^2\partial_z^2+a_6\partial_y^6+a_7\partial_y^4\partial_z^2+a_8\partial_y^2\partial_z^4+a_9\partial_z^6\right]\mathbb{F}=-\frac{2B_5B_7}{B_1B_4}\mathbb{B} \text{———(4)}$$

ここで、$\partial_x=\frac{\partial}{\partial x}$，$\partial_y=\frac{\partial}{\partial y}$，$\partial_z=\frac{\partial}{\partial z}$，$\partial_x^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}$，-----，$\partial_z^6=\frac{\partial^6}{\partial z^6}$，$B_1=C_{11}$，$B_2=C_{22}$，$B_3=C_{33}$，$B_4=C_{44}$，$B_5=C_{55}$，$B_6=C_{66}$，$B_7=C_{12}+C_{44}$，$B_8=C_{13}+C_{55}$，$B_9=C_{23}+C_{66}$，

$a_1=\frac{B_2B_5+B_4B_6}{B_4B_5}+\frac{B_4^2-B_7^2}{B_1B_4}$，$a_2=\frac{B_3B_4+B_5B_6}{B_4B_5}+\frac{B_5^2-B_8^2}{B_1B_5}$，$a_3=\frac{B_2}{B_1}+\frac{B_2B_6}{B_4B_5}+\frac{B_6(B_4^2-B_7^2)}{B_1B_4B_5}$，$a_4=\frac{B_3}{B_1}+\frac{B_3B_6}{B_4B_5}+\frac{B_6(B_5^2-B_8^2)}{B_1B_4B_5}$，

$a_5=\frac{B_2B_3}{B_4B_5}+\frac{B_1(B_6^2-B_9^2)+B_2(B_5^2-B_8^2)+B_3(B_4^2-B_7^2)}{B_1B_4B_5}+2\frac{B_4B_5B_6+B_7B_8B_9}{B_1B_4B_5}$，$a_6=\frac{B_2B_6}{B_1B_4}$，

$a_7=\frac{B_2B_6}{B_1B_4}+\frac{B_2B_3+B_6^2-B_9^2}{B_1B_5}$，$a_8=\frac{B_3B_6}{B_1B_5}+\frac{B_2B_3+B_6^2-B_9^2}{B_1B_4}$，$a_9=\frac{B_3B_6}{B_1B_4}$，$\mathbb{F}=F_x\mathbb{i}+F_y\mathbb{j}+F_z\mathbb{k}$，$\mathbb{B}=X\mathbb{i}+Y\mathbb{j}+Z\mathbb{k}$．

式(1)の弾性定数の独立な数を5および2とする場合、変位関数$\mathbb{F}$は transversely isotropic 弾性体および等方弾性体における変位関数に帰着する。

◦変位と変位関数との関係式　以下の議論を簡単にする為に、式(4)で示された変位関数のうちF_zのみに限定する。　x, yおよびz方向の変位u, v, wは次のように示される。

$$2B_5 u = -\partial_x\partial_z\left\{\frac{B_4B_8}{B_5B_7}\partial_x^2 + \frac{B_2B_8 - B_7B_9}{B_5B_7}\partial_y^2 + \frac{B_6B_8}{B_5B_7}\partial_z^2\right\}F_z \ , \quad 2B_5 v = -\partial_y\partial_z\left\{\frac{B_1B_9 - B_7B_8}{B_5B_7}\partial_x^2 + \frac{B_4B_9}{B_5B_7}\partial_y^2 + \frac{B_9}{B_7}\partial_z^2\right\}F_z \ ,$$

$$2B_5 w = \left\{\left(\frac{B_1}{B_5}\partial_x^2 + \frac{B_4}{B_5}\partial_y^2 + \partial_z^2\right)\left(\frac{B_4}{B_7}\partial_x^2 + \frac{B_2}{B_7}\partial_y^2 + \frac{B_6}{B_7}\partial_z^2\right) - \frac{B_7}{B_5}\partial_x^2\partial_y^2\right\}F_z \qquad (5)$$

他の変位関数F_xおよびF_yについては、x, yおよびzをそれぞれ巡環すればよい。

◦全周単純支持された直交異方性厚板の解

全周単純支持板が自重を有する場合の解を求める為に、変位関数F_zをx，y方向に三角級数で展開すると、一般解は自重を考慮するための特解と板の上･下面の境界条件を満たす同次解の和として表わされる。なお、x･y軸を板の中央面内に、z軸はそれと垂直にとる。

a)特解；自重を有する場合、物体力Zは板厚即ちzに関して一定であるから変位関数F_z^pは、

$$F_z^p = \frac{2B_5B_7}{B_1B_4}\sum_m\sum_n \frac{Z_{mn}}{\alpha_m^6 + a_1\alpha_m^4\beta_n^2 + a_3\alpha_m^2\beta_n^4 + a_6\beta_n^6}\sin\alpha_m x\sin\beta_n y \qquad (6)$$

ここで、$\alpha_m = \frac{m\pi}{a}$，$\beta_n = \frac{n\pi}{b}$，
Z_{mn}；物体力Zのフーリエ係数。

b)同次解；物体力を零とした場合の変位関数F_z^hは、式(4)よりzに関する6次の代数式となるが、偶数次のみを有するので、z方向には双曲線関数$e^{\zeta z}$で表わすと次式のようなζ^2に関する3次式を得る。

$$\Lambda^3 + A_1\Lambda^2 + A_2\Lambda + A_3 = 0 \qquad (7)$$

ここで、$\Lambda = \zeta^2$，$A_1 = -(a_8\beta_n^2 + a_4\alpha_m^2)/a_9$，$A_2 = (a_7\beta_n^4 + a_5\alpha_m^2\beta_n^2 + a_2\alpha_m^4)/a_9$，$A_3 = -(a_6\beta_n^6 + a_3\alpha_m^2\beta_n^4 + a_1\alpha_m^4\beta_n^2 + \alpha_m^6)/a_9$

式(7)の解は、カルダノの解法を用いれば2つの場合に分けられ、変位関数の形は
$p = A_2/3 - A_1^2/9$，$q = A_3 - A_1A_2/3 + 2A_1^3/27$，$\rho = q^2 + 4p^3$とすると、

$$\left.\begin{aligned}
F_z^h &= \sum_m\sum_n\left[C_1\mathrm{ch}\lambda_1 z + C_2\mathrm{sh}\lambda_1 z + (C_3\mathrm{ch}\lambda_2 z + C_4\mathrm{sh}\lambda_2 z)\cos\lambda_3 z + (C_5\mathrm{ch}\lambda_2 z + C_6\mathrm{sh}\lambda_2 z)\sin\lambda_3 z\right]\sin\alpha_m x\sin\beta_n y && (\rho > 0)\\
F_z^h &= \sum_m\sum_n\left[C_1\mathrm{ch}\lambda_1 z + C_2\mathrm{sh}\lambda_1 z + C_3\mathrm{ch}\lambda_2 z + C_4\mathrm{sh}\lambda_2 z + \lambda_2 z(C_5\mathrm{ch}\lambda_2 z + C_6\mathrm{sh}\lambda_2 z)\right]\sin\alpha_m x\sin\beta_n y && (\rho = 0)\\
F_z^h &= \sum_m\sum_n\left[C_1\mathrm{ch}\lambda_1 z + C_2\mathrm{sh}\lambda_1 z + C_3\mathrm{ch}\lambda_2 z + C_4\mathrm{sh}\lambda_2 z + C_5\mathrm{ch}\lambda_3 z + C_6\mathrm{sh}\lambda_3 z\right]\sin\alpha_m x\sin\beta_n y && (\rho < 0)
\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

ここで、λ_i $(i = 1, 2, 3)$は式(7)の根の平方根である。$C_1, \cdots, C_6$は板の上･下面の境界条件より決定される。

3.数値計算例：　表－1に示される弾性定数からなる全周単純支持された正方形板に自重および中央部に部分荷重が作用する場合の解を表－2に示す。　板の諸元は、a；x方向の支間長，$b/a = 1.0$，$h/a = 0.2$，$u/a = v/a = 0.1$，γ；密度，h；板厚，q；荷重強度

表－1 弾性定数

	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{22}	C_{23}	C_{33}	C_{44}	C_{55}	C_{66}
O	0.39	0.22	0.28	0.83	0.50	1.0	0.11	0.22	0.28
T	0.50	0.21	0.21	1.0	0.43	1.0	0.14	0.14	0.21
I	1.0	0.43	0.43	1.0	0.43	1.0	0.21	0.21	0.21

表－2 板中央点の応力 ($x/a = y/a = 0.5$)

	自重($\bar{\gamma}$)		部分荷重(q)			
	$\sigma_x^{u,l}$	$\sigma_y^{u,l}$	σ_x^u	σ_y^u	σ_x^l	σ_y^l
O	5.80	10.05	-0.71	-1.09	0.30	0.45
T	6.05	10.50	-0.73	-1.19	0.35	0.53
I	7.30	7.30	-1.06	-1.06	0.38	0.38

u；板の上面
l；〃 下面
$\bar{\gamma} = \gamma \cdot h$

ここで、O；直交異方弾性体　，T；*transversely isotropic* 弾性体　，I；等方弾性体である。

4.あとがき：　本稿で述べられた変位関数は、動的問題に対しても容易に拡張できる。

1)堀川･園田･広瀬「積層板の3次元応力解析」第28回応用力学連合講演会，昭和53年11月，pp.161.