積分方程式法による棒の座屈解析

京都大学工学部　正員　小林 昭一
〃　　　学生員○佐守 真人

1. はじめに

最近，積分方程式法が種々の問題に応用されるようになってきた．本研究は，その方法を棒の座屈解析に適用したものである．本稿では，Green 関数を用いた方法と境界積分方程式法を適用した結果を対比して述べる．

2. Green 関数を用いた積分方程式法

いま，棒の長さを1とし，棒の一端を原点として棒に沿う座標軸 x，それと直交して y 軸を選ぶ．Green 関数は次のように求められる．

(i) 両端ヒンジ（$x=0,1$ で $y=0$），支配方程式 $y''+\lambda y=0$ より，$G(x,\xi)=\begin{cases} x(1-\xi), & x\leq\xi \\ \xi(1-x), & x>\xi \end{cases}$

(ii) 一端固定，一端自由（$x=0,\ y=0$；$x=1,\ y=y'=0$），　$G(x,\xi)=\begin{cases} x, & x\leq\xi \\ \xi, & x>\xi \end{cases}$

(iii) 一端ヒンジ，一端固定（$x=0,\ y=y''=0$；$x=1,\ y=y'=0$），支配方程式 $y''''+\lambda y''=0$ より，$G(x,\xi)=-\frac{1}{6}\{(x-\xi)^3H-\frac{1}{2}(1-\xi)^2(2+\xi)x^3+\frac{3}{2}\xi(1-\xi)^2x\}$

(iv) 両端固定，（$x=0,1$ で $y=y'=0$），　$G(x,\xi)=-\frac{1}{6}\{(x-\xi)^3H-(1+2\xi)(1-\xi)^2x^3+3\xi(1-\xi)^2x^2\}$

ここに，　$H=\begin{cases} 1, & x\geq\xi \\ 0, & x<\xi \end{cases}$ とする．

上の Green 関数を用いて，棒の支配方程式の解を積分方程式の形で表すと，それぞれ

$$y(x)=\lambda\int_0^1 G(x,\xi)y(\xi)d\xi \quad \cdots\cdots(1),\qquad y(x)=\lambda\int_0^1 G(x,\xi)y''(\xi)d\xi \quad \cdots\cdots(2)$$

となる．式(1)は $y(x)$ を未知関数とする積分方程式であるので，適当に分割してその区間内で形状関数で近似して積分を行なうと，標準的な代数式 $|G-\lambda' I||Y|=0$（$\lambda'=1/\lambda$）を得る。これより固有値，λ（$1/\lambda'$）および固有関数（座屈モード）を求めることは容易である。式(2)を用いる場合には，両辺を x で2回偏微分すると $y''(x)=\lambda\int_0^1 G''(x,\xi)y''(\xi)d\xi$ を得，同様にして，固有値，固有関数を求めることができる。形状関数を線形とした場合の結果を表-1に示す。

表-1　第一固有値の比較

境界条件	正解(×EI)	5分割	10分割	50分割
両端ヒンジ	9.87	10.2 (3.3)	9.95 (0.8)	9.88 (0.1)
一端固定 一端自由	2.47	2.48 (0.8)	2.47 (0.2)	2.47 (0)
一端固定 一端ヒンジ	20.2	21.6 (7.1)	20.5 (1.8)	20.2 (0.2)
両端固定	39.5	42.2 (6.8)	40.5 (2.5)	39.5 (0.1)

（　）内は誤差(%)

3. 境界積分方程式法

支配方程式の基本解は次のようである。

$$G(x,\xi)=\begin{cases} \sin k(x-\xi)/k^3, & x\leq\xi \\ (x-\xi)/k^2, & x>\xi \end{cases} \quad \cdots(3)$$

ここに，$k^2=\lambda$ とした．棒の長さを ℓ として，$L=\partial_x^4+\lambda\partial_x^2$ という作用素に対応して，$\int_0^\ell L(G)y\,dx-\int_0^\ell L(y)G\,dx$ を考えて，部分積分をすると，次のような式を得る。

$$y(\xi)=G'''y|_0^\ell-G''y'|_0^\ell+G'y''|_0^\ell-Gy'''|_0^\ell+\lambda\{G'y|_0^\ell-Gy'|_0^\ell\} \quad \cdots\cdots(4)$$

この式には，式(3)および境界条件を考慮すると，y とその導関数のうち4つが未知数として含まれることが分る。（y, y', y'', y''' の境界での値のうち4個は境界条件で与えられている）．式(4)は内部を表わす式であるが，その極限操作（$\xi\to 0$，または $\xi\to\ell$）を行なうと，左辺は

既知(境界条件より0)となり，$|G||Y|=0$　($|G|$は$\lambda(k)$を含む正方行列，$|Y|$は4つの未知関数からなる列ベクトル）の形に帰着できる．$|Y|$が解をもつためには，$\|G\|=0$でなければならない。これより，固有値，固有ベクトルが求められる．$|G|$の例を示すと次のようである。

両端ヒンジ

$$\begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{k^3}\sin kl & 0 & 0 \\ -\frac{l}{k^2} & 0 & -l & 0 \\ 0 & \frac{1}{k}\sin kl & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

一端固定,一端自由

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{k^2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 \\ \cos kl & \frac{1}{k}\sin kl & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

一端固定,一端ヒンジ

$$\begin{vmatrix} -\frac{l}{k^2} & 0 & -\frac{1}{k^2} & -l \\ 0 & \frac{1}{k^3}\sin kl & -\frac{1}{k^2}\cos kl & 0 \\ 0 & \frac{1}{k}\sin kl & \cos kl & 0 \\ \frac{1}{k^2} & -\frac{1}{k^2} & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

両端固定

$$\begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{k^3}\sin kl & \frac{1}{k^2} & -\frac{1}{k^2}\cos kl \\ -\frac{l}{k^2} & 0 & \frac{1}{k^2} & -\frac{1}{k^2} \\ -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k^2}\cos kl & 0 & -\frac{1}{k}\sin kl \\ -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$\|G\|=0$より，それぞれ座屈条件式

$\sin kl=0$ ，　$\cos kl=0$　　$\tan kl=kl$　　$\sin\frac{kl}{2}=0$ or. $\tan\frac{kl}{2}=\frac{kl}{2}$

を得る．これらは微分方程式より求めたものと一致する。

次に，断面の異なった2本の棒が軸を同じくして剛結された場合を考えてみる。棒の長さ，曲げ剛性，たわみをそれぞれ，$l, m; E_1I_1, E_2I_2; u, v$とおく．個々の棒について式(4)を考え，境界条件と2本の棒の剛結の条件（適合条件）を考慮すると，8個の未知数を含む式が，一本の棒の場合と同様にして求められる。両端の境界条件によって異なった座屈条件式が求められるが，一端ヒンジ，一端固定の例を示すと次のような正方行列$|G|$を得る。

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -l & \frac{1}{k^2} & \frac{l}{k^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{k^3}\sin kl & 1 & 0 & \frac{2}{k^2} & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{m}{h^2} & 0 \\ \frac{1}{k^2}\cos kl & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{k^2} & 0 & -\frac{1}{h^2} & 0 \\ \frac{1}{k}\sin kl & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos kl & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{k^2}\cos hm & -\frac{1}{hk^2}\sin hm & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h}{k^2}\sin hm & \frac{1}{k^2}\cos hm & 0 & \frac{1}{h^2} & 0 \end{vmatrix}$$

ここに，$P/(E_1I_1)=k^2$，$P/(E_2I_2)=h^2$とおいた。

これより，座屈条件式

$$h(m+l)(k\cos kl\cos hm-h\sin kl\sin hm)$$
$$-(h\sin kl\cos hm+k\sin hm\cos kl)=0 \quad \cdots\cdots(5)$$

を得る。$k=h$とすると，$\tan k(l+m)=k(l+m)$となる。他の境界条件の場合にも同様にして解が得られる。図-1に式(5)より求まる第一固有値を示した。ここに，$t=(E_2I_2)/(E_1I_1)$，$l+m=1.0$，とし，横軸はlの値，縦軸には固有値をとってある。

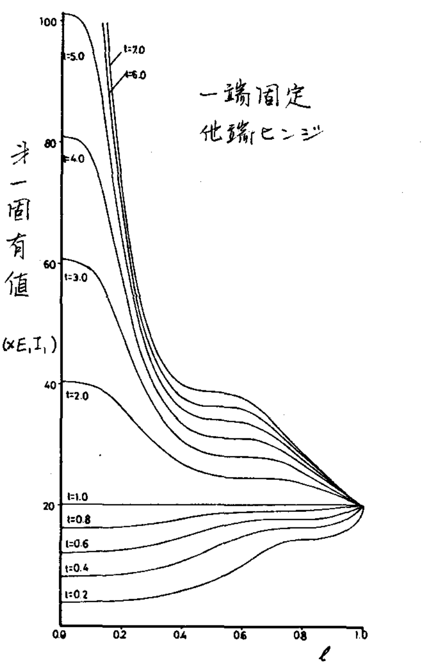

図-1 第一固有値とlの関係

4. おわりに

本稿では2種類の積分方程式法を紹介した。Green関数を用いる方法は，領域内を分割して適当な形状関数を用いて積分しなければならず，境界条件は正確に満足できるが，Green関数を見付けることと，領域積分を行なわなければならない欠点がある．これに対して，境界積分方程式法は境界積分だけでよいという利点がある．今後の発展が期待できよう。