弾塑性問題の積分方程式法による解析

京都大学工学部　正員　小林昭一
京都大学工学部　正員　○西村直志

序

積分方程式法は，特異性を有する問題の解法として，従来の手法以上のものである事が認識されつつある．弾塑性問題は，特異面としての弾塑性境界を含み，積分方程式法の適用により高精度の解析結果が期待できる問題の１つである．本研究では１重層ポテンシアル法による弾塑性解析法を示し，２次元，３次元問題への適用を試みる．

基礎式

増分理論における弾塑性変位増分場は，１重層ポテンシアルを用いて次の様に表示できる．

$$\mathbf{du}=\int_{\partial D}\boldsymbol{\Gamma}\cdot\mathbf{d\phi}\,dS+\int_{D^p}\boldsymbol{\Gamma}\overleftarrow{\nabla}:\mathbf{C}:\mathbf{d\epsilon}^p\,dV \tag{1}$$

ここに ∂D は対象とする物体の境界，D^p は塑性域，$\boldsymbol{\Gamma}$ は無限弾性体の Green テンソル，$\mathbf{C}$ は弾性常数テンソルである．簡単のために完全弾塑性体を考えれば，流れ則を用いて式(1)は

$$\mathbf{du}=\int_{\partial D}\boldsymbol{\Gamma}\cdot\mathbf{d\phi}\,dS+\int_{D^p}\boldsymbol{\Gamma}\overleftarrow{\nabla}:\mathbf{C}:\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\tau}}\,d\tilde{\Psi}\,dV \tag{2}$$

$$d\tilde{\Psi}-\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\tau}}:\mathbf{C}:\mathbf{d\epsilon}\Big/\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\tau}}:\mathbf{C}:\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\tau}}=0 \tag{3}$$

と書かれる．ここに F は降伏関数である．境界条件及び式(3)から１重層密度 $\mathbf{d\phi}$ およびスカラー関数 $d\tilde{\Psi}$ をもとめ，式(2)を用いて通常の増分計算によって弾塑性解析が実行できる．なお硬化，複数降伏条件，２重層ポテンシアル法を用いたクラック解析などへの拡張も容易であるが，ここでは省略する．

数値解析においては ∂D，及び D^p 上で適当な形状関数を用いて $\mathbf{d\phi}$，$d\tilde{\Psi}$ を離散化し，境界条件及び(3)を連立１次方程式に変換するならば，従来の積分方程式法の手法をそのまま用いる事ができる．ここでは ∂D，D^p をそれぞれ面(線)要素，物体(面)要素の集合としてモデル化し，各要素内で $\mathbf{d\phi}$，$d\tilde{\Psi}$ を一定と仮定した．D^p は予め降伏の予想される部分に要素を配置する事によりモデル化した．

数値解析例　（２次元問題）

円孔の２軸引張問題は，非圧縮性の仮定の下での解析解が Galin により得られている．本研究では $E=210$ 万，$\sigma_y=2500$ (kg/cm^2)，$\nu=0.45$ の，von Mises の降伏条件に従う完全弾塑性体について解析を行なった．応力条件は，図１の記号で，無限遠での引張応力が，$\tau_{11}^{\infty}=0.75\sigma_y$，$\tau_{22}^{\infty}=0.85\sigma_y$ の場合とした．図１は塑性域形状を示しており，解析解（楕円）と

よく一致している。図2，図3には，それぞれ，X_1軸に沿うτ_{22}，X_2軸に沿うτ_{11}の分布が示されている。これらも解析解とかなりよく一致している。解析解との差は，約1～2%であった。またこれらの結果は非常によく降伏条件を満たしており，$\tau':\tau'/\frac{2}{3}\sigma_y^2$の値は，最大でも1.0004程度であった（正解では1）。なお計算時間は31ステップの増分計算に約16秒要した（京都大学大型計算機センター，M190使用）。以上の様に，本手法は2次元問題に用いる場合，高精度かつ高速なアルゴリズムである事が確認された。

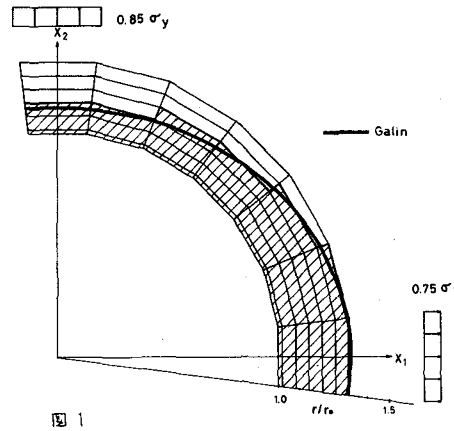

図1

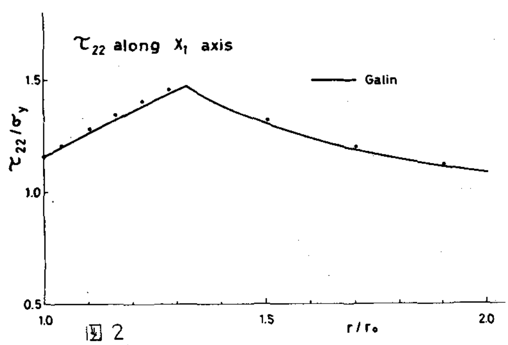

図2

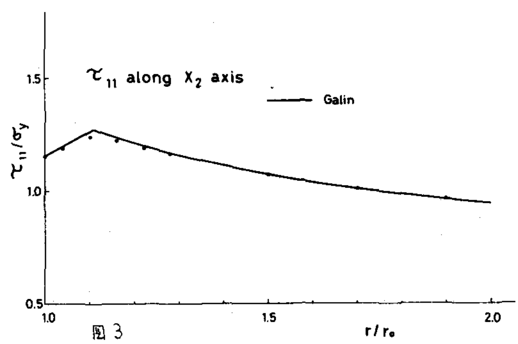

図3

数値解析例（3次元問題）

3次元問題の例としてトンネル切端周辺の弾塑性解析を行なった。地盤は$E=7000\,kg/cm^2$，$\nu=0.2$，粘着力$=20\,kg/cm^2$，内部摩擦角30°のDrucker-Pragerの降伏条件に従う完全弾塑性体としてモデル化した。また形状は直径10mの円断面とし，図4の様にモデル化した。初期応力$\tau_{11}^0=-60$，$\tau_{22}^0=\tau_{33}^0=-80\,(kg/cm^2)$のときの$x_1x_3$面内での主応力図は図5の様になる。

紙面の都合で示されなかった結果は当日発表する。

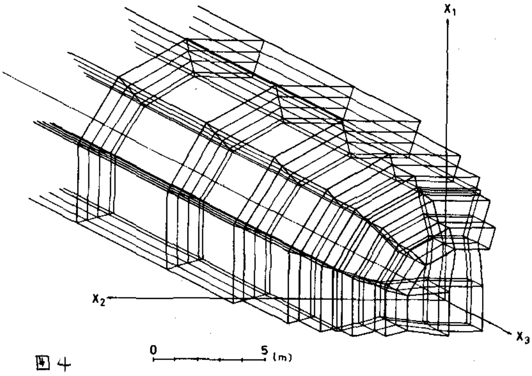

図4

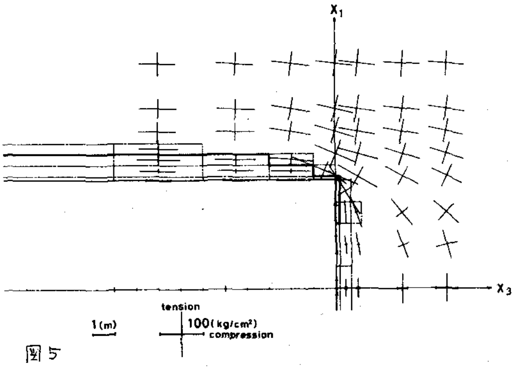

図5