積分方程式法の定式化について

京都大学工学部　正　丹羽　義次
福井大学工学部　正　福井　卓雄
本州四国連絡橋公団　正 ○仁木　清貴

はじめに

近年、積分方程式が弾性問題に適用されつつあるが、積分方程式法には各種定式化があり、それらは、以下に述べる3つに大別される。　1つは、物理的に意味のはっきりしたもの（たとえば、変位と応力ベクトル）を用いて定式化した直接法。2つめは、物理的な意味の明確でない密度を用いて定式化した間接法。3つめは，応力関数のように，それ自体は直接に物理的意味はないが、2階微分したものが応力を表わすなど，間接的に物理的意味を有するものを用いて定式化した半直接法がある。　本研究では，直接法として、Bettiの公式を用いた方法（Somigliana式）を、間接法として、1重層ポテンシャルを用いた方法を定式化する。さらに、直接法の新しい試みとして，転位と応力ベクトルを用いた方法を提案する。　また、これらの方法を数値解析により、比較検討し、それぞれの方法に適した問題を明らかにする。　これに先だち，定性的な特性を把握するために，ラプラス問題で同様の定式化を行ない，数値計算を試みる。

ラプラス問題

ラプラス問題に対しては、以下の3つの定式化を行なった。

1重層ポテンシャルによる方法　（方法1）

$$\Phi(x) = \int_{\partial D} G(x,y)\,\varphi(y)\,ds_y \qquad \text{in } D \tag{1}$$

$$\frac{\partial \Phi(x)}{\partial n} = \frac{1}{2}\varphi(x) + \int_{\partial D} \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_x}\,\varphi(y)\,ds_y \qquad \text{on } \partial D \tag{2}$$

グリーン式による定式化　（方法2）

$$\Phi(x) = \int_{\partial D} \left\{ G(x,y)\frac{\partial \Phi(y)}{\partial n} - \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\Phi(y) \right\} ds_y \qquad \text{in } D \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}\Phi(x) + \int_{\partial D} \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\Phi(y)\,ds_y = \int_{\partial D} G(x,y)\frac{\partial \Phi(y)}{\partial n}\,ds_y \qquad \text{on } \partial D \tag{4}$$

新しい定式化　（方法3）

内部のポテンシャルが、次式のように表わせるとする。

$$\Phi(x) = \int_{\partial D} \left\{ \tilde{G}(x,y)\,\omega(y) - G(x,y)\,p(y) \right\} ds_y \qquad \text{in } D \tag{5}$$

外部領域で、ポテンシャル勾配がゼロであるという条件を導入し，極限操作により，境界に近づけると

$$\frac{1}{2}\omega(y) + \int_{\partial D} \frac{\partial \tilde{G}(x,y)}{\partial s_x}\,\omega(y)\,ds_y = -\int_{\partial D} \frac{\partial G(x,y)}{\partial s_x}\,p(y)\,ds_y \qquad \text{on } \partial D \tag{6}$$

となる。　ここに

$$G(x,y) = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r}\ , \qquad \tilde{G}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\tan^{-1}\frac{x_2-y_2}{x_1-y_1} \tag{7}$$

これらの式をもとに，円形形状の内部問題と外部問題について解析を行なった。境界条件はいずれも，$\frac{\partial \Phi}{\partial n}=\frac{\lambda}{R}$ である。なお，数値解析 よる結果は当日示す。これらの結果から，次の結論が得られた。

- 境界から十分に離れた点では，それぞれの方法に固有の精度がある。
- この精度は，方法2を用いたものが良い。
- 逆に境界付近では，外部問題には方法1が，内部問題には方法3が精度が良い。
- 方法3は，内部問題にはかなり有効である。

弾性問題

弾性問題に対しては，以下のように定式化される。

1重層ポテンシャルを用いる方法　（方法1）

$$\underset{\sim}{u}(x)=\int_{\partial D}\underset{\sim}{U}(x,y)\cdot\underset{\sim}{\varphi}(y)\,ds_y \qquad \text{in } D \qquad (8)$$

$$\underset{\sim}{t}(x)=\frac{1}{2}\underset{\sim}{\varphi}(x)+\int_{\partial D}\frac{\partial \underset{\sim}{U}(x,y)}{\partial n_x}\cdot\varphi(y)\,ds_y \qquad \text{on } \partial D \qquad (9)$$

Somigliana式を用いる方法　（方法2）

$$\underset{\sim}{u}(x)=\int_{\partial D}\left\{\underset{\sim}{U}(x,y)\cdot\underset{\sim}{t}(y)-\underset{\sim}{T}(x,y)\cdot\underset{\sim}{u}(y)\right\}ds_y \qquad \text{in } D \qquad (10)$$

$$\frac{1}{2}\underset{\sim}{u}(x)+\int_{\partial D}\underset{\sim}{T}(x,y)\cdot\underset{\sim}{u}(y)\,ds_y=\int_{\partial D}\underset{\sim}{U}(x,y)\cdot\underset{\sim}{t}(y)\,ds_y \qquad \text{on } \partial D \qquad (11)$$

新しい定式化　（方法3）

領域内での変位が，境界上の応力ベクトルと転位により，次式のように表わされるとする。

$$\underset{\sim}{u}(x)=\int_{\partial D}\left\{\underset{\sim}{U}(x,y)\cdot\underset{\sim}{t}(y)+\underset{\sim}{D}(x,y)\cdot\underset{\sim}{b}(y)\right\}ds_y \qquad \text{in } D \qquad (12)$$

このとき，領域外部での変位の接線方向微分がゼロであるとして，境界に近づけると，

$$\frac{1}{2}\underset{\sim}{b}(x)-\int_{\partial D}\frac{\partial \underset{\sim}{D}(x,y)}{\partial s_x}\cdot\underset{\sim}{b}(y)\,ds_y=\int_{\partial D}\frac{\partial \underset{\sim}{U}(x,y)}{\partial s_x}\cdot\underset{\sim}{t}(y)\,ds_y \qquad \text{on } \partial D \qquad (13)$$

ここに，$\underset{\sim}{u}$：変位ベクトル，　$\underset{\sim}{t}$：応力ベクトル

$\underset{\sim}{b}$：Burgersベクトル，　$\underset{\sim}{U}$：第1基本特異解

$\underset{\sim}{T}$：第2基本特異解，$\underset{\sim}{D}$：集中転位による変位

これらの式を用いて，内部および外部Neumann問題を解析した。解析モデルを図1～図4に示す。図5に，図3のモデルの解析結果を示す。これらのモデルの解析結果，および結論は，当日とりまとめて発表する予定である。

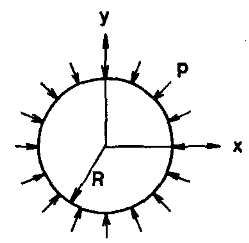

図1　一様圧縮

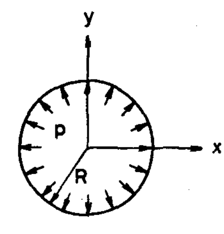

図2　円孔の押拡げ

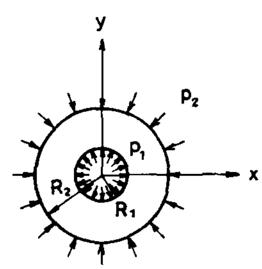

図3　一様な内外圧をうける円筒

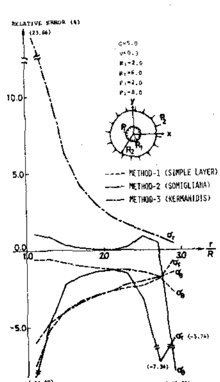

図5　相対誤差（応力）

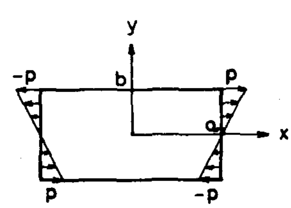

図4　長方形の純曲げ

文献　Rieder, G.; Mechanische Deutung und Klassifizierung einigen Integralverfahren der ebenen Elastizitätstheorie I & II, Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences. Série des sciences techniques Vol. 16. No. 2. 101–114.