

積分方程式による平板の固有振動問題の解析

京都大学工学部 正 員 丹羽義次

同 正 員 小林昭一

同 〇学生員 北条道弘

[1] はじめに 積分方程式法による平板の固有振動問題の解析についての概要、並びに数値結果についてはすでに報告した¹⁾。この報告の目的は、本手法の持つ本質的特性を具体的に数値で検証すること、および本手法を、固定、単純、自由支持辺を有する、円形、四角形板に対して適用した結果を検討することにある。

[2] 場の方程式、境界条件、基本解と積分方程式の構成 紙面の都合上、基本解と積分表示のみを記す。

$$U(x, y; \lambda) = \frac{1}{2\pi} [H_0^{(0)}(i\lambda r) - H_0^{(0)}(i\lambda r)]$$

$$U(x) = \int_{\partial D} U(x, y; \lambda) u_2(y) dS_y - \int_{\partial D} \frac{\partial U(x, y; \lambda)}{\partial n_y} u_2(y) dS_y$$

詳細はりき参照されたい。

[3] 積分方程式による固有値解析の特性

について 本手法の持つ最も大きな特徴は、(1) わゆる変位関数に相当するものが、基礎方程式を満足する基本解を求めることにより決定される点である。問題は、与えられた幾何形状に対し境界条件を如何に満足させるかである。ここでは境界分割数 N が nodal line 数を決めていること、 N を固定して積分の精度を上げれば、 N によって決まるモードに対応する固有値はすべて正確に求まることを示し、次に境界形状の近似との関係についての数値実験結果を示す。円形形状、固定境界条件を有する板を対象とし、密度は各分割区間で一定と仮定し、まず境界形状の近似による誤差を除くために、円弧上で数値積分を実行した。Table 1-4 は $N=1, 2$ に対する結果である。ただしここで言う $N=1$ とは全く境界分割が行なわれていないことを意味するので注意されたい。境界の周全体が一つの要素とな、というという意味である。 $\bar{\lambda}_j$ は NASA SP-680²⁾ に示された結果、 λ_j は本手法による結果である。また m は Nodal line 数を、 S は Nodal Circle 数を示している。Gauss point が増加(積分の精度が向上)すれば、求まる固有値の精

Table 1 $N=1, \Delta\lambda=0.1$, Gauss 8 Point

$m=0$			
S	$\bar{\lambda}_j$	λ_j	$ \bar{\lambda}_j - \lambda_j / \bar{\lambda}_j \times 100\%$
0	3.196	3.2	0.13
1	6.306	6.3	0.01
2	9.439	9.5	0.65
3	12.577	12.9	2.57
4	15.716	15.6	0.74
5	18.857	19.2	1.82
6	21.997	23.2	5.47
7	25.138	26.5	5.42
8	28.279	31.9	12.80
9	31.420	—	—

Table 2 $N=1, \Delta\lambda=0.1$, Gauss 48 Point

$m=0$			
S	$\bar{\lambda}_j$	λ_j	$ \bar{\lambda}_j - \lambda_j / \bar{\lambda}_j \times 100\%$
0	3.196	3.2	0.13
1	6.306	6.3	0.10
2	9.439	9.4	0.41
3	12.577	12.6	0.18
4	15.716	15.7	0.10
5	18.857	18.9	0.23
6	21.997	22.0	0.01
7	25.138	25.1	0.15
8	28.279	28.3	0.07
9	31.420	31.4	0.06

Table 3 $N=2, \Delta\lambda=0.1$, Gauss 8 Point

$m=0$				$m=1$		
S	$\bar{\lambda}_j$	λ_j	$ \bar{\lambda}_j - \lambda_j / \bar{\lambda}_j \times 100\%$	$\bar{\lambda}_j$	λ_j	$ \bar{\lambda}_j - \lambda_j / \bar{\lambda}_j \times 100\%$
0	3.196	3.2	0.13	4.611	—	—
1	6.306	6.3	0.10	7.799	8.2	5.14
2	9.439	9.5	0.65	10.958	10.9	0.53
3	12.577	12.6	0.18	14.109	14.1	0.06
4	15.716	15.8	0.53	17.256	17.5	1.41
5	18.857	18.9	0.23	20.401	20.5	0.49
6	21.997	22.2	0.92	23.545	—	—
7	25.138	—	—	26.689	26.9	0.79
8	28.279	28.5	0.78	29.832	30.0	0.56
9	31.420	31.2	0.70	32.976	32.5	0.90

Table 4 $N=2, \Delta\lambda=0.1$, Gauss 48 Point

$m=0$				$m=1$		
S	$\bar{\lambda}_j$	λ_j	$ \bar{\lambda}_j - \lambda_j / \bar{\lambda}_j \times 100\%$	$\bar{\lambda}_j$	λ_j	$ \bar{\lambda}_j - \lambda_j / \bar{\lambda}_j \times 100\%$
0	3.196	3.2	0.13	4.611	—	—
1	6.306	6.3	0.10	7.799	8.1	3.86
2	9.439	9.4	0.41	10.958	10.9	0.53
3	12.577	12.6	0.18	14.109	14.0	0.77
4	15.716	15.7	0.10	17.256	17.4	0.83
5	18.857	18.9	0.23	20.401	20.5	0.49
6	21.997	22.0	0.01	23.545	23.4	0.62
7	25.138	25.1	0.15	26.689	26.8	0.42
8	28.279	28.3	0.07	29.832	30.0	0.56
9	31.420	31.4	0.06	32.976	32.9	0.23

度が向上すること。また、低次固有値は8 pointを用い、これば十分であること、高次固有値も正確(コンマ数%以内)に求むようとするならば48 pointで十分であることがわかる。なお、48 pointに対するTable 2と4より、分割数が1から2に増加した場合、対称モードに対応する $m=0$ に対する結果は全く同じで、相対誤差が両者共にコンマ数%以内であること、 $N=2$ では新しく対称モードに対応する $m=1$ に対する固有値がこれらもほぼ同じ誤差内で求まってくるということがわかる。これらの結果より、境界分割数により nodal line が定まり、nodal circle の増加による固有値はすべて正確に求まることがわかる。この点、差分法、F.E.M. 等、他の手法との著しい相異が現われている。Table 5, 6 は、境界分割数を $N=28$ 、積分法を Gauss 8 point と固定し、境界形状の近似度による精度との関係を探ったもので、Table 5 が円弧上、Table 6 が内接多角形上の積分による結果である。Table 中、オ1段は NASA SP-160²⁾ の結果、オ2段が本手法による結果、オ3段は相対誤差をパーセントで表わしたものである。この結果より、円弧上の積分が、より高精度の結果を与えていること。多角形による方法が少し精度は劣り、しかも、コンマ数パーセント内で低次から40個の固有値が求まっている点に注意したい。

[4] 固定、単純、自由支持板に対する結果

Table 7-11 に3つの境界条件に対する数値結果を示した。積分法等、詳しい事項(特にFree)については当日報告する。

[5] おわりに B1が本手法の持つ特性が明らかになり、境界分割数の選定方に一つの指針が得られた。[4]の各種の境界条件に対し本手法を適用し、高精度の結果が得られたことがわかった。

参考文献

1) 北原、丹羽、小林, 第33回年次講演会概要集 I-15, 1978 2) Leissa, A.W., Vibration of Plates, NASA SP-160, 1969

Table 5 $N=28, \Delta\lambda=0.01$

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	3.196	4.611	5.906	7.144	8.347	9.526	10.687	11.835	12.971	14.098	15.218
	3.20	4.61	5.91	7.14	8.34	9.51	10.66	11.83	12.90	13.98	14.99
	0.12	0.02	0.07	0.06	0.08	0.17	0.25	0.04	0.55	0.84	1.50
1	6.305	7.799	9.197	10.536	11.837	13.107	14.355	15.585	16.799		
	6.31	7.80	9.20	10.53	11.80	13.09	14.32	15.58	16.66		
	0.06	0.01	0.03	0.06	0.21	0.13	0.10	0.03	2.00		
2	9.439	10.958	12.402	13.795	15.150	16.475	17.776	19.058			
	9.44	10.96	12.40	13.79	15.13	16.44	17.71	18.90			
	0.01	0.02	0.02	0.04	0.13	0.21	0.37	0.83			
3	12.577	14.109	15.579	17.005	18.396	19.758					
	12.58	14.11	15.61	17.00	18.37	19.69					
	0.02	0.007	0.44	0.03	0.14	0.34					
4	15.716	17.256	18.745	20.192							
	15.72	17.26	18.74	20.17							
	0.03	0.02	0.03	0.11							
5	18.857	20.401	21.901								
	18.86	20.40	21.89								
	0.02	0.005	0.05								

Table 6 $N=28, \Delta\lambda=0.01$

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	3.196	4.611	5.906	7.144	8.347	9.526	10.687	11.835	12.971	14.098	15.218
	3.21	4.64	5.94	7.18	8.40	9.57	10.72	11.86	12.98	14.06	15.22
	0.44	0.63	0.58	0.50	0.63	0.46	0.31	0.21	0.07	0.27	0.01
1	6.305	7.799	9.197	10.536	11.837	13.107	14.355	15.585	16.799		
	6.34	7.84	9.25	10.59	11.89	13.16	14.40	15.66	16.76		
	0.58	0.53	0.58	0.51	0.45	0.40	0.31	0.48	0.23		
2	9.439	10.958	12.402	13.795	15.150	16.475	17.776	19.058			
	9.49	11.02	12.47	13.87	15.09	16.54	17.81	19.02			
	0.54	0.57	0.55	0.54	0.40	0.40	0.19	0.20			
3	12.577	14.109	15.579	17.005	18.396	19.758					
	12.65	14.19	15.60	17.09	18.48	19.81					
	0.58	0.57	0.13	0.50	0.46	0.26					
4	15.716	17.256	18.745	20.192							
	15.80	17.35	18.85	20.29							
	0.53	1.59	0.56	0.49							
5	18.857	20.401	21.901								
	18.97	20.52	21.83								
	0.60	0.58	0.32								

Table 7 Eigen Values of Clamped Circular Plate ($N=28, \Delta\lambda=0.01$)

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
Airey, J.R. (λ_j)	3.1955	4.611	5.906	6.3064	7.144	7.799
Integral Eq. (λ_j)	3.21	4.64	5.94	6.34	7.18	7.84
$ \lambda_j - \lambda_j / \lambda_j \times 100\%$	0.45	0.63	0.58	0.53	0.50	0.53

Table 8 Eigen Values of Clamped Square Plate ($N=28, \Delta\lambda=0.01$)

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
Young, D. (λ_j)	5.999	8.568	10.405	11.473	11.500	12.851
Integral Eq. (λ_j)	6.14	8.62	10.47	11.51	11.53	12.86
$ \lambda_j - \lambda_j / \lambda_j \times 100\%$	2.53	0.61	0.62	0.32	0.26	0.07

Table 9 Eigen Values of Simply Supported Circular Plate ($N=28, \Delta\lambda=0.1, \nu=0.3$)

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
NASA SP-160 (λ_j)	2.231	3.734	5.065	5.455		6.965
Integral Eq. (λ_j)	2.2	3.8	5.1	5.5	6.4	7.0
$ \lambda_j - \lambda_j / \lambda_j \times 100\%$	1.39	1.77	0.67	0.82		0.50
$J_{15}(\lambda)=0$	2.405	3.832	5.136	5.520	6.380	7.016

Table 10 Eigen Values of Simply Supported Square Plate ($N=28, \Delta\lambda=0.1, \nu=0.3$)

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
NASA SP-160 (λ_j)	4.443	7.025	8.886	9.935	11.327	12.953
Integral Eq. (λ_j)	4.4	7.0	8.9	9.9	11.3	13.0
$ \lambda_j - \lambda_j / \lambda_j \times 100\%$	0.97	0.36	0.16	0.35	0.24	0.36

Table 11 Eigen Values of Free Plate ($N=28, \Delta\lambda=0.1, \nu=0.3$)

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
NASA SP-160 (λ_j)	2.292	3.014	3.497	4.530	4.648
Integral Eq. (λ_j)	2.4	3.2	3.5	4.6	4.6
$ \lambda_j - \lambda_j / \lambda_j \times 100\%$	4.71	6.17	0.08	1.55	1.03