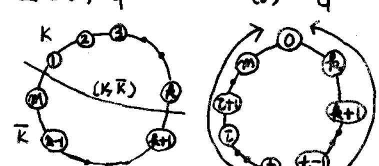
# ネットワークにおける多種流問題に関する一考察

大阪市立大学　正員　○岡村治子
大阪市立大学　正員　　西村昂

## 1、はじめに

道路網に一定のOD構成比を与えたとき、容量カット法（西村[1]）によって最大フローの上限Tを求めることができる。ここではグラフが平面であり、外周の線をとり除くと木になり、すべての発着点が外周上にあるとき、Tが最大フローであることをTを道路網に配分するアルゴリズムを与えて示す。グラフを$G=(V,X)$で表わす。$V$は点の集合、$X$は線の集合である。単位OD表$(P_{i,j})$は対称$(P_{ij}=P_{ji})$であるとし、点$i$と$j$を接合する線$(i,j)$の片側車線の容量を$C_{i,j}$とする。$V$を2つの集合$K,\overline{K}$にわけるカット$(K,\overline{K})$を考え、このカットの容量を$C(K,\overline{K})$で表わし、断面交通量を$Q(K,\overline{K})=\sum_{i\in K,}\sum_{j\in\overline{K}}P_{ij}$で表わす。このとき最大フローは$T=\min_{(K,\overline{K})}C(K,\overline{K})/Q(K,\overline{K})$で与えられる。$G$の外周上の点の集合を$E$とおく。$TP_{ij}=f_{i,j}$とおく。$V\supset V_1,V_2$に対して$f(V_1:V_2)=\sum_{i\in V_1}\sum_{j\in V_2}f_{i,j}$とする。フローを配分したとき線$(i,j)$を通るフローの合計を$x_{i,j}$とする。

図-1 (a) G　(b) G′




## 2、アルゴリズム1（Gがサイクルのときの Tの配分）

$G$は$m$点からなるサイクルとし、Tを与えるカットを$(K,\overline{K})=\{(m,1),(k,k+1)\}$とする。$K=\{1,2,\cdots,k\}$, $\overline{K}=\{k+1,\cdots,m\}$とする。

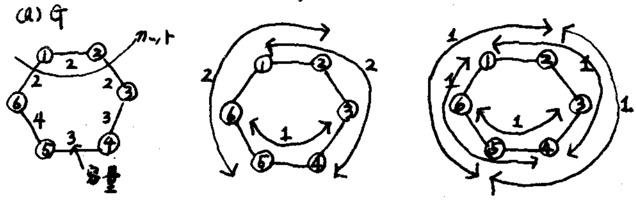
Step1（Kを一点に縮めたときのフローの配分）

$f_{i,j}$ $(i,j\in K$ 又は $i,j\in\overline{K})$は$(K,\overline{K})$を通らずに配分する。Kを一点0に縮めて$f_{0,j}=\sum_{i\in K}f_{i,j}$ $(j=k+1,\cdots,m)$とおき$G'$とする。$C_{1,m}$に達するまで$f_{0,j}$を$j=m,m-1,\cdots$の順に左まわりで（$(1,m)$を通って）配分する（今$t$まで配分されたとする）。のこりの$f_{0,j}$を右まわりで配分する。

（このとき$G'$の各線$(i,i+1)$に対して$C_{i,i+1}\geqq x_{i,i+1}$となることを示す。$C_{0,m}=f(0:t,t+1,\cdots,m)$, $C_{0,m}+C_{i,i+1}\geqq f(0,k,\cdots,i:i+1,\cdots,m)$より$C_{i,i+1}\geqq f(k+1,\cdots,i:i+1,\cdots,m)+f(0:t,\cdots,i)=x_{i,i+1}$（図-1））

Step2（フローの配分の修正）$G$に$G'$で配分したフローを流す。もし$C_{i,i+1}\geqq x_{i,i+1}$ $(i=1,2,\cdots,k-1)$ならstop。そうでないときは$x_{i,i-1}-C_{i,i-1}=a_i$とおき、$a_i>0$で最小のものを$a_3$とする。点3から出発する右まわりのフロー（なければ2からのフロー）を遠いものから順に$a_3/2$だけ左まわりに変える。同様に4からの左まわりのフローを$a_3/2$だけ右まわりに変える。$C_{i,i+1}\geqq x_{i,i+1}$ $(i=1,2,\cdots,k-1)$となるまでこれをくりかえす。

図-2 (a) G　(b)　(c)




（図-2(a)のようなGを考え$f_{36}=1$, $f_{1,4}=2$, $f_{2,5}=2$とすると、Step1で(b)のようなフローの配分が求まる。step2で修正すると(c)の配分になる。stop。このとき$C_{4,5}\geqq x_{4,5}$かどうかが問題となるが　$C_{12}+C_{45}\geqq f_{1,4}+f_{3,6}+f_{2,5}$, $C_{12}=f_{2,5}/2+f_{1,4}/2$より$C_{45}\geqq f_{1,4}/2+f_{2,5}/2+f_{3,6}=x_{45}$　が導ける。一般の場合も同様にしてアルゴリズム1が実行可能であることが示せる。）

## 3、アルゴリズム2（Gがサイクルでないときの Gの配分）

Step1 (Gの変形) $\deg i \geqq 4$ であるGの各点iに対して新しい点を加えて $\deg i=3$ となるように書きかえる。(図-3、点0を加えて $C_{1,0}=C_{1,3}+C_{1,4}$ とする。$\deg i=5,6,\cdots$ の場合も同様である。)発着点でない各点jに対してjと接合する3点を1,2,3とする。$C_{j,1}>C_{j,2}+C_{j,3}$ のときは $C_{j,1}=C_{j,2}+C_{j,3}$ とおきなおす。発着点でない次数2の点を除き、容量は小さい方とする。(図-4)

図-3

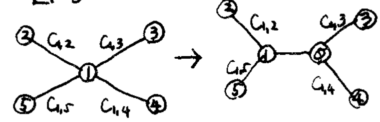
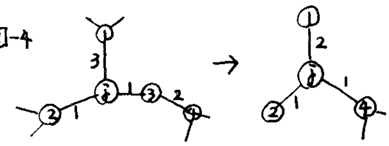
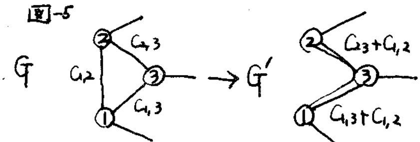


図-4



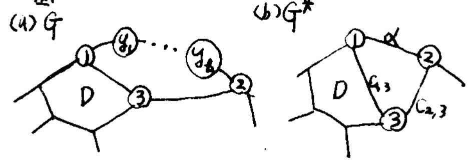
Step2 (Gの面の個数を減らす) 三角形1,2,3があり、$1,2 \in E$ のとき線(1,2)を(1,3),(2,3)に重ねたグラフをG′とすると、G′で配分されたフローはGに配分しなおすことができる。よってGの面数を一つ少くできる。

図-5



Step3 (Gは外周を除くと木になるので次数2の点を除くと三角形又は二角形となる多角形が必ずある。図-6(a)のような多角形に対して $y_1,y_2,\cdots,y_k$ から出発するフローを1,2からのフローにおきかえる。)

図-6



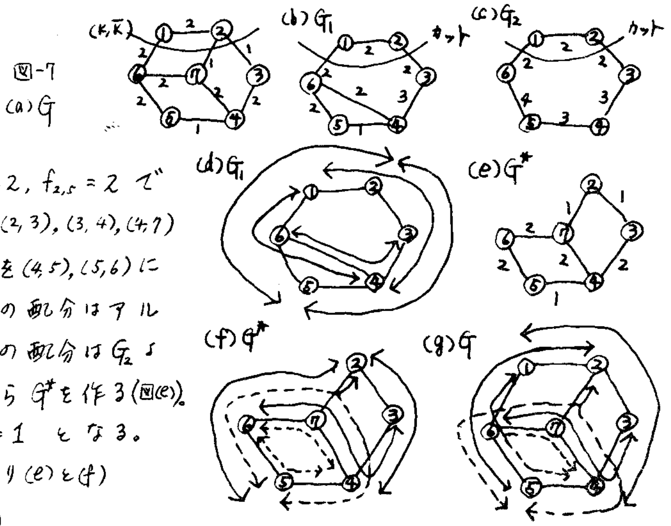
(A) (1,3)を面Dの周の他の線に重ねたグラフを$G_1$とする。(Tを与えるカットがなくならないように注意する。)$G_1$でのフローを帰納的に求める。

(B) $G_1$で $1,y_1,\cdots,y_k,2$ を発着点として1を通ってjに配分されたフローの合計を $f^*_{1,j}$ とおき、2を通って配分されたフローの合計を $f^*_{2,j}$ とおく。又 $1,y_1,\cdots,y_k,2$ を通過するフローの合計をαとおく。$G^*$を図-2(b)のグラフとすると、Step2により$G^*$の面の個数は一つ減るので、$f^*_{i,j}$ ($f^*_{1,j}$, $f^*_{2,j}$ 以外の $f^*_{i,j}=f_{i,j}$) を$G^*$で配分することができる。

Step4 $G^*$で配分されたフローと$G_1$で$(1,y_1),(y_1,y_2),\cdots,(y_k,2)$に配分されたフローを合計するとGでの配分が求まる。

4. 例 図-7(a)のようなGを考える。$P_{36}=0.1$, $P_{1,4}=0.2$, $P_{2,5}=0.2$ とする。$T=(C_{2,3}+C_{2,7}+C_{1,6})/(P_{1,4}+P_{2,5})=10$, $K=\{1,2\}$, $\bar{K}=\{3,4,5,6,7\}$, $f_{3,6}=1$, $f_{1,4}=2$, $f_{2,5}=2$ である。アルゴリズム2, Step3. (2,7)を(2,3),(3,4),(4,7)に重ねて$G_1$を作る(図(b))。Step3. (4,6)を(4,5),(5,6)に重ねて$G_2$を作る(図(C))。$G_2$でのフローの配分はアルゴリズム1で求める(図-2(C))。$G_1$での配分は$G_2$より求められる(図(d))。$G_1$での配分から$G^*$を作る(図(e))。$f^*_{2,4}=1$, $f^*_{6,4}=1$, $f^*_{3,6}=1$, $f^*_{2,5}=1$, $f^*_{6,5}=1$ となる。この配分は(f)のようになる。Step4より(e)と(f)を合計してGの配分が求まる(図(g))。

図-7




(実線は1のフロー, 点線は1/2のフローを表わす)

5. 参考文献


[1] 西村昂「道路網の最大フローの存在範囲について」土木学会23回年会講演集第4部 1968 P431~432