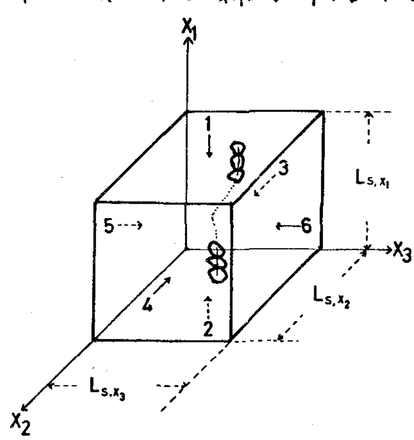
粒状体におけるヒズミの定義について

京都大学防災研究所　正員　北村良介

1. まえがき：　筆者は砂質土のような形状，大きさの不規則な粒子の集合体である粒状体の変形過程において，巨視的な物理量である応力やヒズミは粒子レベルでの確率的な運動の総和によって生ずるという認識にたち，物性論的な立場から粒状体の力学モデルを提案してきている[1,2]。従来のモデルは軸対称応力状態でのものであったが，現在それを3次元一般応力状態でのものに拡張しつつあり，今回の発表では粒状体を構成する個々の粒子の運動をもとに定義される粒状体におけるヒズミに焦点をあてて考察を行うことにする。

2. 粒状体におけるヒズミ：　考察の基礎となるものが図−1，2に示してある。図−1はある応力状態sでの粒状体内の単位要素と基準座標をあらわしている（ここに，単位要素とは粒子径に比し一辺が非常に大きな立方体を意味する）。単位要素の各座標軸方向の長さを各々L_{s,x_1}，L_{s,x_2}，L_{s,x_3}とし，また6つの面を順に1，2，……，6と名づけることにする。単位要素内では無数の粒子が任意の粒子構造を形成しており，図−1に示すように粒子の中心を結びながら平面1から平面2へ向う任意の経路を描くことができる。この経路に含まれるある隣接する2粒子をとりだしたものが図−2に示されている。座標軸x_1'，x_2'，x_3'はそれぞれ図−1のx_1，x_2，x_3と平行である。また，粒子接平面がx_1'，x_2'，x_3'の各軸となす角を各々β_1，β_2，β_3とする。次に応力状態が$s-\Delta s$からsに変化し，その結果，単位要素のx_1軸方向の長さが$L_{s-\Delta s,x_1}$からL_{s,x_1}に変化したとすれば，x_1軸方向のヒズミϵ_{s,x_1}は次のように定義される。

$$\epsilon_{s,x_1}=\frac{L_{s,x_1}-L_{s-\Delta s,x_1}}{L_{s-\Delta s,x_1}} \tag{1}$$



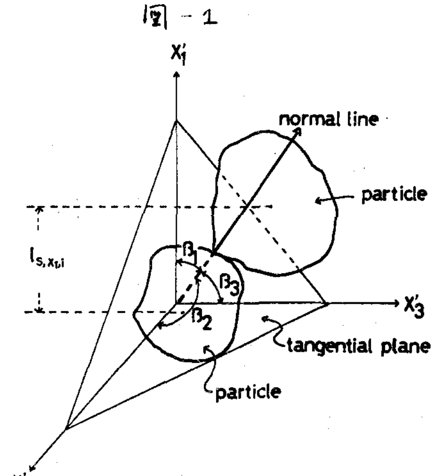
図－1

ところで，図−1に示された平面1から平面2へ向う経路における全粒子数をN_{s,x_1}，また図−2に示されたように隣接する2粒子の中心間距離のx_1軸方向の投影を$l_{s,x_1,i}$とすれば，L_{s,x_1}が粒子径に比し非常に大きいので，近似的に次式が成り立つ。

$$L_{s,x_1}=\sum_{i=1}^{N_{s,x_1}} l_{s,x_1,i} \tag{2}$$

(2)式を(1)式に代入すると次のようになる。

$$\epsilon_{s,x_1}=\frac{\sum_{i=1}^{N_{s,x_1}} l_{s,x_1,i}-\sum_{i=1}^{N_{s-\Delta s,x_1}} l_{s-\Delta s,x_1,i}}{\sum_{i=1}^{N_{s-\Delta s,x_1}} l_{s-\Delta s,x_1,i}}$$



図－2

上式の右辺の分母子を$N_{s-\Delta s,x_1}$で割ると，

$$= \frac{1/N_{s-\Delta s,x_1}\cdot\sum_{i=1}^{N_{s,x_1}} l_{s,x_1,i} - 1/N_{s-\Delta s,x_1}\cdot\sum_{i=1}^{N_{s-\Delta s,x_1}} l_{s-\Delta s,x_1,i}}{1/N_{s-\Delta s,x_1}\cdot\sum_{i=1}^{N_{s-\Delta s,x_1}} l_{s-\Delta s,x_1,i}} = \frac{N_{s,x_1}/N_{s-\Delta s,x_1}\,E[l_{s,x_1,i}] - E[l_{s-\Delta s,x_1,i}]}{E[l_{s-\Delta s,x_1,i}]} \quad (3)$$

ここに，$E[l_{s,x_1,i}]$：応力状態 s での図-1に示した経路における隣接する2粒子の中心間距離の x_1 軸方向の投影 $l_{s,x_1,i}$ の平均値。

図-1に示された平面1から平面2へ向う経路は無数に描くことができるが，x_1 軸方向に関して粒状体の粒子構造が確率的に一様であるとすれば，どのような経路をとっても $E[l_{s,x_1,i}]$ は固有の値をとることになり，次式が成り立つ。

$$E[l_{s,x_1,i}] = M[l_{s,x_1,i}] \quad (4)$$

ここに，$M[l_{s,x_1,i}]$：応力状態 s での単位要素中のすべての隣接する2粒子の中心間距離の x_1 軸方向の投影 $l_{s,x_1,i}$ の平均値。

今，応力状態 s での単位要素中の接点角 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ の分布および粒径 R の分布をあらわす確率密度関数を各々 $w(\beta_1, \beta_2; s)$，$g(R)$ とすれば，次式が成り立つ。

$$M[l_{s,x_1,i}] = \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R\cos\beta_1\, g(R)\, w(\beta_1, \beta_2; s)\, d\beta_2\, d\beta_1\, dR$$

$$= \int_0^\infty R g(R)\, dR \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\beta_1\, w(\beta_1, \beta_2; s)\, d\beta_2\, d\beta_1 = \bar{R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\beta_1\, w(\beta_1, \beta_2; s)\, d\beta_2\, d\beta_1 \quad (5)$$

ここに，$\bar{R}$：粒子の平均粒径。

(4)式，(5)式を(3)式に代入すると次のようになる。

$$\epsilon_{s,x_1} = \frac{N_{s,x_1}/N_{s-\Delta s,x_1}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\beta_1\, w(\beta_1, \beta_2; s)\, d\beta_2\, d\beta_1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\beta_1\, w(\beta_1, \beta_2; s)\, d\beta_2\, d\beta_1}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\beta_1\, w(\beta_1, \beta_2; s)\, d\beta_2\, d\beta_1} \quad (6)$$

(6)式は応力状態が $s-\Delta s$ から s に変化することにより生ずる x_1 軸方向のヒズミ ϵ_{s,x_1} は各応力状態での接点角の分布をあらわす確率密度関数 $w(\beta_1, \beta_2; s-\Delta s)$，$w(\beta_1, \beta_2; s)$ と $N_{s,x_1}/N_{s-\Delta s,x_1}$ によって求められるということを意味している。$N_{s,x_1}/N_{s-\Delta s,x_1}$ は応力状態が $s-\Delta s$ から s に変化することによって図-1に示された経路に含まれる全粒子数が変化する割合をあらわしている。これは粒子接点での不連続な運動，すなわち，図-1に示された経路中の粒子が間げきに落ちこんだり（$N_{s,x_1}/N_{s-\Delta s,x_1}<1$），割りこんだり（$N_{s,x_1}/N_{s-\Delta s,x_1}>1$）することより生ずるものと考えられる。このような概念は金属材料などの分野で発展してきた転位現象に対応するものである。筆者は $N_{s,x_1}/N_{s-\Delta s,x_1}$ を応力状態 s での x_1 軸方向の落ちこみ割りこみ率と仮称している。

この節のこれまでの考察を x_2，x_3 軸方向についても適用すると，各方向のヒズミ ϵ_{s,x_2}，ϵ_{s,x_3} が求められる。

3．あとがき：　今回の発表では粒状体を構成する個々の粒子の運動をもとに粒状体のヒズミを求める統計・確率論的な一手法を提案した。(6)式より粒状体のヒズミは接点角の分布をあらわす確率密度関数と落ちこみ割りこみ率によって求めることができる。これらのものを定量的に評価するため，筆者の提案しているカ学モデルでは粒子の確率的な運動にマルコフ過程を適用しているわけであるが，詳しい説明は別の機会にゆずることにする。

参考文献　1) 北村良介：ランダム粒状体のモデル化に関する一考察，第11回土質工学研究発表会，1976

2) 北村良介：確率過程を用いた粒状体の力学モデル，第12回土質工学研究発表会，1977