閉塞単一砂層への雨水の浸透機構について

京大防災研　正員　石原安雄 ○下島栄一
京大大学院　学生員　古谷博司

1．はじめに

間隙空気の閉塞を伴う雨水浸透(湛水浸透)実験に於て，気乾状態の細砂(0.15mm程度のほぼ一様粒径)を用いた場合，浸透が進むにつれ間歇的な大気泡とそれに伴う小気泡の放出が認められる[1,2]。この様な不連続的現象が生起している場合，土壌水及び間隙空気の挙動を平均的にみて連続現象とみなした際に，間隙空気圧をpotentialとみなしてDarcy則が成立するかどうかは重要な問題である。本文では，wetting front近傍の挙動と円筒底面部の空気圧の変化に着目して，この妥当性を検討する。

2．解析

0.15～0.5 mm程度のほぼ一様粒径の実験に於ては，浸透が進行するに従い平均的にみると大略
(1) wetting frontはある最大値の土壌水分(θ_*)を有した一定の形状で，一定の速度(ω_*)で伝播する。
(2) その際，円筒下端での空気圧(p_{aL})の変化割合は，一定かつ正符号である。
なる現象が生起する[1,2]。以下では特に(1)に基づき解析し，(2)の事実を演繹する。
まず，空気圧をpotentialとして両相に対してDarcy則を仮定すると基礎式は次の様である。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[D(\theta)\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x} - K(\theta)\cdot\left(1-\frac{\partial p_a}{\partial x}\right)\right] \quad \cdots\text{①} \qquad \frac{\partial \rho_a\cdot(\theta_s-\theta)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho_a\cdot K_a(\theta)\cdot\left(\frac{\partial p_a}{\partial x}-\frac{\rho_a}{\rho_w}\right)\right] \quad \cdots\text{②}$$

ここに，θ:体積含水比，$D(\theta)$:水の拡散係数，$K(\theta)$;不飽和透水係数，ρ_a,ρ_w:空気,水の密度，$K_a(\theta)$:透気係数，p_a;大気圧(P_{ao})からの増加空気圧，θ_s:飽和含水比，t;時間，x;距離
さらに，空気は等温的変化をし，理想気体として次の状態方程式を設定する。

$$\rho_a = c\cdot P_a = c\cdot(P_{ao}+p_a) \quad ;\ c:\text{定数} \quad \cdots\cdots\text{③}$$

式①,②での独立変数(x,t)を式④の様な(ζ,τ)に変換すると，$\theta(\zeta,\tau)=\theta(\zeta)$であるので基礎式は式⑤,⑥となる。

$$\zeta = x-\omega_*\cdot(t-t_0) \quad , \quad \tau = t-t_0 \quad \cdots\cdots\text{④}$$

$$\omega_*\cdot\frac{d\theta}{d\zeta} + \frac{d}{d\zeta}\left(D(\theta)\cdot\frac{d\theta}{d\zeta}\right) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(K(\theta)\cdot\frac{\partial p_a}{\partial\zeta}\right) + \frac{dK(\theta)}{d\theta} = 0 \quad \cdots\text{⑤}$$

$$P_a\cdot\omega_*\frac{d\theta}{d\zeta} + (\theta_s-\theta)\cdot\left(\frac{\partial p_a}{\partial\tau}-\omega_*\frac{\partial p_a}{\partial\zeta}\right) - P_a\left\{\frac{dK_a(\theta)}{d\theta}\left(\frac{\partial p_a}{\partial\zeta}-\frac{\rho_a}{\rho_w}\right)\frac{\partial\theta}{\partial\zeta} + K_a(\theta)\left(\frac{\partial^2 p_a}{\partial\zeta^2}-\frac{\rho_a}{\rho_w}\cdot\frac{\partial p_a/\partial\zeta}{P_a}\right)\right\} - K_a(\theta)\left(\frac{\partial p_a}{\partial\zeta}-\frac{\rho_a}{\rho_w}\right)\frac{\partial p_a}{\partial\zeta} = 0 \quad \cdots\text{⑥}$$

式⑤は，$\theta=\theta_0$ (初期含水比：一定)，$\frac{d\theta}{d\zeta}\fallingdotseq 0$，$\frac{\partial p_a}{\partial\zeta}=\frac{\rho_a}{\rho_w}\fallingdotseq 0$，at $\zeta=\infty$ (i.e. $\theta\to\theta_0$) $\cdots$ ⑦
なる境界条件より，式⑧が得られる[1]。

$$\omega_*\cdot(\theta-\theta_0) + D(\theta)\cdot\frac{d\theta}{d\zeta} + K(\theta)\frac{\partial p_a}{\partial\zeta} + K(\theta)-K(\theta_0) = 0 \quad \cdots\cdots\text{⑧}$$

さらに，上式に式⑨なる条件を用いると，式⑩が得られる[1]。

$$\theta_* = \theta(\zeta_*) \ ,\ \left(\frac{d\theta}{d\zeta}\right)_* = 0 \quad \text{at} \quad \zeta=\zeta_* \quad \cdots\cdots\text{⑨}$$

$$\omega_* = \frac{K(\theta_*)-K(\theta_0)}{\theta_*-\theta_0} - \frac{K(\theta_*)\left(\frac{\partial p_a}{\partial\zeta}\right)_*}{\theta_*-\theta_0} \quad \cdots\cdots\text{⑩}$$

さて，式⑧中の$\partial p_a/\partial\zeta$を式⑥に代入したのち，$\zeta\to\zeta_*$の極限を考え，$\left(\frac{d^2\theta}{d\zeta^2}\right)_{\zeta\to\zeta_*}=0 \quad \cdots$ ⑪

を仮定することにより，次式が得られる。

$$(\theta_s-\theta_*)\left(\frac{\partial p_a}{\partial \tau}\right)_* + \left\{-\omega_*\cdot\frac{\theta_*-\theta_0}{K(\theta_*)}+\left(1-\frac{K(\theta_0)}{K(\theta_*)}\right)\right\}\cdot\left\{-\omega_*\cdot(\theta_s-\theta_*)+2\cdot Ka(\theta_*)\cdot\frac{\rho_{a*}}{\rho_w}\right\} - Ka(\theta_*)\cdot\left\{-\omega_*\cdot\frac{\theta_*-\theta_0}{K(\theta_*)}+\left(1-\frac{K(\theta_0)}{K(\theta_*)}\right)\right\}^2 = 0 \quad \cdots ⑫$$

これより，

$$\omega_* = -\frac{M_2}{2\cdot M_1}\left\{1\mp\sqrt{1-4\cdot\frac{M_1\cdot M_3}{M_2^2}}\right\} \quad \cdots ⑬$$

ここに，

$$M_1 = \frac{(\theta_*-\theta_0)\cdot(\theta_s-\theta_*)}{K(\theta_*)}\cdot\left(1-\frac{1}{\lambda_1}\right) \quad ; \quad \lambda_1 = \frac{K(\theta_*)}{Ka(\theta_*)}\cdot\frac{\theta_s-\theta_*}{\theta_*-\theta_0}$$

$$M_2 = -(\theta_s-\theta_*)\cdot\frac{K(\theta_*)-K(\theta_0)}{K(\theta_*)}\cdot\left\{1-2\cdot\frac{1}{\lambda_1}(1-\lambda_2)\right\} \quad ; \quad \lambda_2 = \frac{K(\theta_*)}{K(\theta_*)-K(\theta_0)}\cdot\frac{\rho_{a*}}{\rho_w}$$

$$M_3 = -Ka(\theta_*)\cdot\left(\frac{K(\theta_*)-K(\theta_0)}{K(\theta_*)}\right)^2\cdot(1-2\cdot\lambda_2)\cdot(1+A) \quad ; \quad A = -\frac{(\theta_s-\theta_*)(\partial p_a/\partial\tau)_*}{Ka(\theta_*)\cdot\left(1-\frac{K(\theta_0)}{K(\theta_*)}\right)^2\cdot\left(1-2\frac{\rho_{a*}}{\rho_w}\cdot\frac{1}{1-K(\theta_0)/K(\theta_*)}\right)}$$

式⑧より，$\partial p_a/\partial\zeta$ は ζ のみの関数であるので，p_a は $p_a(\zeta,\tau)=F(\zeta)+G(\tau)$ なる変数分離の形となるので次式の関係が得られる。

$$(\partial p_a/\partial\tau)_* \doteqdot dp_{aL}/dt \quad \cdots ⑭$$

また，式⑬に注目すると，$\omega_*=const.$ ゆえ，$(\partial p_a/\partial\tau)_* = const.$ i.e. $dp_{aL}/dt = const.$ $\cdots$ ⑮

の関係が得られ，式⑭⑮より実験事実(2)の前半が説明出来た。

次に，式⑬に基づいてω_*を詳細に調べるため，

$$Ka(\theta) = K(\theta_s)\cdot\frac{\mu_w}{\mu_a}\cdot f(\theta) \quad , \quad f(\theta)\doteqdot 1-1.1\frac{\theta}{\theta_s} \quad \text{ここに，}\mu\text{は粘性係数} \quad \cdots ⑯$$

の関係[3]を仮定する。粒径0.15mm程度の実験では，$\theta_*\sim0.35$, $\theta_s\doteqdot0.46$, $\theta_0\doteqdot0$ であるので，

$$\lambda_1 = \frac{K(\theta_*)}{K(\theta_s)}\cdot\frac{\mu_a}{\mu_w}\cdot\frac{1}{1-\theta_0/\theta_*}\cdot\frac{\epsilon}{(1-\epsilon)(1.1\epsilon-0.1)} \sim \frac{K(\theta_*)}{K(\theta_s)}\cdot\frac{\mu_a}{\mu_w}\cdot\frac{\theta_s}{\theta_*-\theta_0} \sim 10^{-2} \quad \text{，ここに，}\epsilon=1-\frac{\theta_*}{\theta_s}\sim0.25$$

$$\lambda_2 = \frac{K(\theta_*)}{K(\theta_*)-K(\theta_0)}\cdot\frac{\rho_{a*}}{\rho_w} \sim 10^{-2}$$

となる。このλ_1，λ_2を用いて式⑬をOrder的に検討すると，次の様である。

$$\omega_* = \frac{K(\theta_*)}{\theta_*}\cdot\left(1\mp\sqrt{-A+O(\lambda_i\lambda_j, A\lambda_i)}+\frac{\lambda_1}{2}-\lambda_2\right) \quad , \quad i,j=1\text{ or }2 \quad \cdots ⑰$$

$$\text{ここに，}\quad A\sim-\frac{\theta_s-\theta_*}{Ka(\theta_*)}(\partial p_a/\partial\tau)_* \doteqdot -\frac{\theta_s-\theta_*}{Ka(\theta_*)}\cdot dp_{aL}/dt \quad \cdots ⑱$$

式⑱のOrderを具体的に検討すると（粒径0.15mmの実験[1]），

i. 湛水深18cm，層厚152cmの場合の実験結果：$dp_{aL}/dt=5.1\times10^{-3}$, $\theta_*=0.36$ $\longrightarrow$ $-A\sim1.0\times10^{-2}$

ii. 湛水深10cm，層厚120cmの場合の実験結果：$dp_{aL}/dt=1.8\times10^{-3}$, $\theta_*=0.35$ $\longrightarrow$ $-A\sim3.6\times10^{-3}$

となる。よって，$-A$が上例の様に10^{-3}以上のorderであるなら，λ_1,λ_2のω_*に及ぼす項は無視出来，次の様になる。

$$\omega_* \doteqdot \frac{K(\theta_*)}{\theta_*}\left(1\mp\sqrt{-A}\right) \quad \cdots ⑲$$

ただし，$-A>0$, i.e. $dp_{aL}/dt>0$ となることが条件である。

すなわち，ω_*は式⑲で示され，また式⑱より実験事実(2)の後半の変化が説明された。なお，式⑰⑲での2根については「－」のみが有用である。

以上の様にして，空気の間歇的放出がある場合でも，実験的事実をみた様な大きさの時空平均的スケールでみれば，連続体として式①②を扱ってもよいことが間接的に検証されたことになる。

参考文献

1) 石原・下島：京大防災研年報，第19号，1976，　2) 石原・下島：京大防災研年報，第20号，1977，　3) Scheidegger：the Physic of Flow through Porous Media