重みつき残差法による輸送問題の解析

京都大学工学部　正　員　丹羽義次
京都大学工学部　正　員　大津政康
京都大学大学院　学生員　○中村豊彦

1. はじめに

有限要素法（F.E.M.）は、その汎用性の高さより数多くの問題に適用されているが、固体力学以外の分野においては汎関数の極値化という変分法的アプローチは必ずしも簡単ではない。しかし、重みつき残差法（W.R.M.）を用いると適当な汎関数が見つからなくともF.E.M.の定式化が可能となる。本研究は、拡散・輸送問題にW.R.M.を適用し、数値解析を試みたものである。

2. 解析法

以下、W.R.M.によるF.E.M.の定式化の概要を述べる。
いま境界 ∂S で囲まれた領域Sで微分方程式および境界条件が次式で与えられているとする。

$$L(\{\phi\}) = a\phi_{xx} + b\phi_{yy} + c\phi_x + d\phi_y + e\phi + f\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \quad \text{in } S \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} &\phi = \Phi(s) && \text{on } \partial S_1 \\ &a\phi_x n_x + b\phi_y n_y = \Phi_n(s) && \text{on } \partial S_2 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

nは境界での法線を表わす。
Sを有限要素に分割し、求めようとする関数 $\{\phi\}$ を各要素 e について次の形に仮定する。

$$\{\phi\} = [N]\{\phi\}^e \qquad (3)$$

ここに $[N]$ は形状関数, $\{\phi\}^e$ は要素節点における ϕ の値である。式(3)は一般には式(1)を満足せず残差Rを生ずる。そこで重み関数 W_i を適当に選び、W.R.M.を適用すると

$$\int_S W_i \cdot L([N]\{\phi\}^e) = 0$$

として $\{\phi\}^e$ が求まる。重み関数 W_i の選び方にはいろいろ考えられるが、本研究では $W_i = N_i$ と選ぶ方法、すなわちGalerkin法を適用して解析した。

3. 解析モデル

解析例として図1のように地下に開削された空洞を想定し、空洞からの放射性核種の拡散・輸送問題を考える。輸送方程式は次の通りである。

$$\left(D_x\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D_y\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\right) - \left(U_x\frac{\partial c}{\partial x} + U_y\frac{\partial c}{\partial y}\right) - \left(\frac{\rho}{e}K_{ab} + \lambda\right)c - \left(1 + \frac{\rho}{e}K_{ad}\right)\frac{\partial c}{\partial t} = 0$$

ここに, c：気相中の核種の濃度（g/cm³）　D_x, D_y：拡散係数（cm²/sec）　U_x, U_y：気体の流速（cm/sec）　ρ：土粒子の密度　e：間ゲキ比　K_{ab}：核種の吸着係数（cm³/g·sec）　K_{ad}：核種の付着係数（cm³/g）　λ：減衰係数

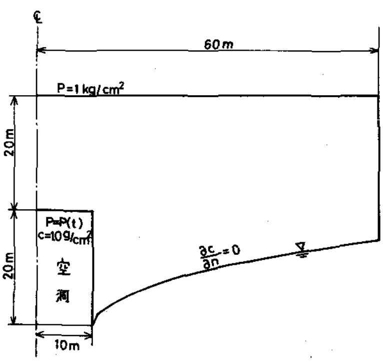

図 1

(5)式を解くためには、まずv_x, v_yを決定しなければならない。本研究では、気体の流速は圧力変化のみによって生じダルシー則に従うとした。このとき、気体の非定常拡散方程式は次式で与えられる。

$$K_a\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+K_a\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}=a\cdot f\cdot\frac{\partial P}{\partial t} \qquad (6)$$

K_a：気体の透気係数(cm/sec)
a：気体の圧縮率(1/cm)　f：間ゲキ率

(5), (6)式にW.R.M.を適用し、(6)式より圧力分布を求め、これより求まる速度を(5)式に代入して各時間ステップの濃度分布を求める。

4. 解析結果

対象とする核種として地盤中での吸着がなく半減期の長い^{85}Krを採用した。この核種が間ゲキ比$e = 0.5$の泥岩のような地盤中を移動すると想定して、表1に示す諸物性値を用いた。ただし、表1に示す物性値では核種の移動が遅く、W.R.M.による数値解析における解が収束するためには、1要素の長さを10cm以下にしなければならない。ここでは、このような系での核種移動の挙動を検討することを目的としたため拡散・透気各係数のオーダーをそれぞれ10^1だけ上げた値を用いて解析した。事故時を想定した図2の空洞内圧力変化より求めた圧力変化を図3に、流速分布を図4，図5に、核種の濃度分布の一例を図6に示す。計算結果の詳細は当日発表する。

表1　核種の物性値

係数	^{85}Kr
D_x, D_y (cm²/sec)	2.0×10^{-2}
K_a (cm/sec)	1.0×10^{-3}
K_{ab} (cm³/g·sec)	0
K_{ad} (cm³/g)	0
λ (1/sec)	0.693×10^{-9}

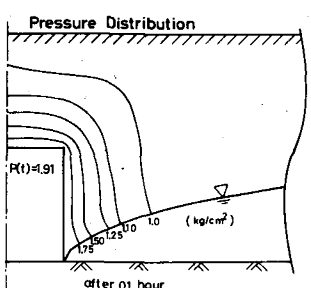

図 3

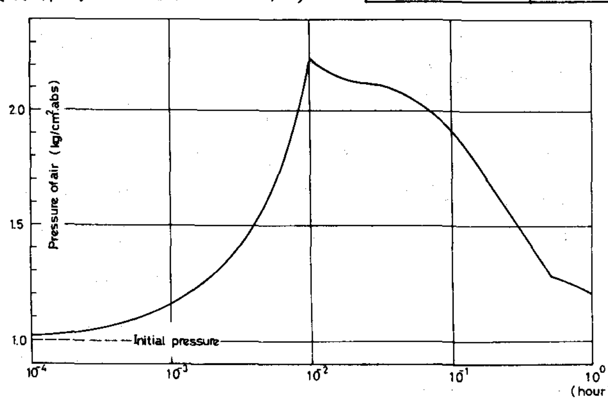

図 2

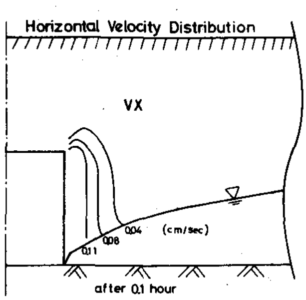

図 4

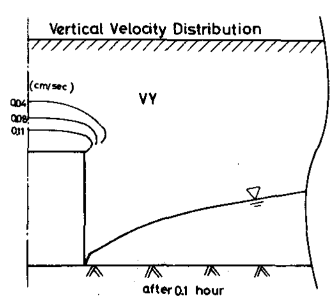

図 5

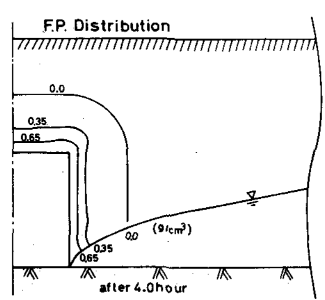

図 6