

掃流砂輸送の確率過程としての特性とそのモデルの一般化

京都大学工学部 正員 中川 博次
 京都大学工学部 正員 〇辻本 哲郎
 Universidad de Chile Alejandro López

▷ 掃流砂移動とそれに伴う流砂量推定や河床変形の解析の問題は古くから多くの研究者によって取り組まれてきたものの、流砂-移動床力学が十分に体系化されているとは言い難い。これは、その問題の複雑さや多分に確率的な要素を含んでいること等に原因しており、ある程度避けられない面もある。しかし、モデルとしての厳密さが少々欠けても、体系的なモデルを模索することは必ずや流砂力学の進展につながるもの信じる。著者らは掃流砂れきの運動機構、掃流砂移動に伴う移動床現象の研究を進めているが、これと平行して stochastic model による移動床過程の体系的叙述についても考究しており、その一環として行なつた掃流砂の dispersion に関する stochastic model の検討について報告する。

▷ 個々の掃流砂れきの運動とそのアンサンブル的挙動を詳しく観察するため移動床において一個の着色砂れきの挙動を何度も繰り返して追跡するというトレーサ実験を実施した。使用砂の中央粒径は 0.198 mm で従来のトレーサ実験（着目砂粒群の分散状況の追跡）で用いられたものに比べ比較的小さい砂で $\beta = 1/2$ (1- β) の 2 種類程度の条件でトレーサが河床に数粒径程度分埋没することがあり、平坦河床とはいえ、粒径程度の砂面の不規則性が存在した。この実験では掃流砂運動の各 step および rest period を一つ一つ刻銘に記録されたので右表に示すようにこれらの間の独立性という確率モデルの基本仮定の検証が可能となった。表中の r は相関係数で添字 X, T はそれぞれ

RUN	t_*	r_{TX}	r_{XT}	r_{XX}	r_{TT}
1	0.057	0.0303 (154)	-0.134 (138)	-0.0550 (146)	-0.0411 (142)
2	0.072	0.0299 (191)	-0.134 (175)	0.0555 (172)	-0.1071 (172)
3	0.062	-0.0068 (213)	-0.106 (191)	0.0117 (187)	-0.0347 (187)
4	0.053	-0.0170 (44)	-0.0958 (33)	0.0973 (33)	0.0387 (33)
5	0.074	0.0908 (260)	0.0810 (244)	0.0733 (249)	0.0287 (249)
6	0.072	0.0456 (313)	0.0497 (305)	0.0221 (303)	0.0766 (303)
7	0.086	-0.0187 (286)	-0.0479 (248)	0.0779 (270)	0.145 (268)

Note: Numbers in () denote the numbers of data.

step length, rest period (ともに確率変数) を表し、系統するこれらの相関係数の値を示している。また step length, rest period の超過確率を図-1 および 図-2 に示した。rest period の方は平均 rest period T_0 で規格化してある。これを見ると rest period の方は平坦河床でも、若干の河床の不規則性を配列のため、従来の粗い砂での実験による保証された指数分布からはかなり、これが見られ、step length の dunes 等が形成された場合に偏倚する (図-1 の Run 3 参照) のとは逆の傾向となる。すなわち河床の不規則性が増すと (dunes 等の形成を含めて)、rest period の変動係数は増加し、step length のそれは減少する。これは step length は表面を移動している砂に限られて測られ、それが河床形状に強く支配されていること、河床形状は不規則とはいえ、比較的规则的な傾向をも持っていること (たとえば、河床波長分布の変動係数は 0.3~0.5 程度¹⁾ と指数分布のその半分以下である) による。こうしたすべり方はそのヒストグラムがベル型となり指数分布からのずれは特異で、これまでも dune bed などでの step length の分布としては gamma 分布の適用が推奨された²⁾³⁾。一方 rest period の場合は、河床の不規則性はトレーサの rest period を経験する位置 (深さ方向) のばらつきを増加させ、図-3 に示すような理由で指数分布からずれる。すなわち、次の離脱機会を待つ条件が

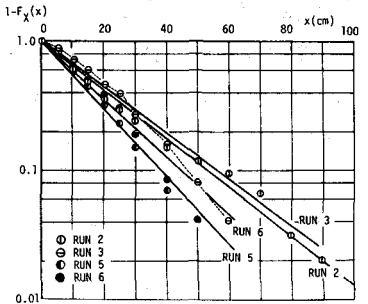


図-1 step length の分布例

一定ならば「指数分布に従うであろうが」、その条件が、トラサの位置の存在確率 $e(z)$, 位置による条件付平均 rest period $\bar{T}(z)$ の違い¹⁾ によって分布 $p(\bar{T})$ を有することになり、これに原因する。しかしこの傾向のずれは、ヒストグラムとしては J 型を保存するため 従来それ程留意されなかったであろう。いま、 $p(\bar{T})$ に gamma 分布 (α : shape parameter, β : scale parameter) を仮定し、rest period の分布の密度関数を求めると、

$$f_T(\tau) = \int_0^\infty \frac{1}{\bar{T}} \exp(-\tau/\bar{T}) p(\bar{T}) d\bar{T} = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \bar{T}^{\alpha-2} \exp\{-(\beta\bar{T} + \frac{\tau}{\bar{T}})\} d\bar{T}$$

∴ $\Gamma(\cdot)$ は gamma 関数

となり、とくに $\alpha = 3/2$ ($\bar{T}$ の変動係数は $\sqrt{2/3}$ とした) の場合、

$$f_T(\tau) = (3/\bar{T}_0) \exp(-6\sqrt{6}\tau/\bar{T}_0)$$

となる。この場合 rest period の全体としての変動係数は $\sqrt{2/3} \approx 1.53$ となり、実験結果とほぼ一致する。また上式から求められる理論分布曲線を図-2 に破線で示した。

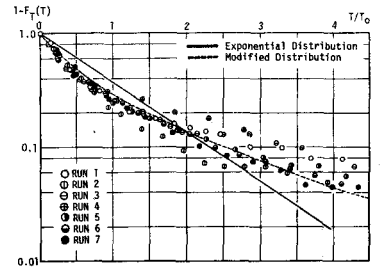


図-2 rest period の分布例

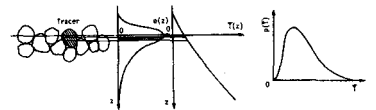


図-3 模式図

▷ このように rest period, step length が指数分布に従われない時の石の分散性状を知ることは比較的困難で、stochastic dispersion model の一般化を図る必要がある。

分散性状を端的に示すのは t 時間後の移動距離 $x(t)$ (確率過程) のモーメントである。いま t 時間後は x だけ移動する確率密度関数を $f_x(x)$ とすると、 $f_x(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_x^{(n)}(x) P_n(t)$ となり、 $f_x(x)$ は step length の確率密度関数、 $P_n(t)$ は時間間隔 $(0, t]$ の間の step 数 $N(t)$ が n である確率、 $f^{(n)}$ は f の n 重畳み込みを示す。したがって、 $x(t)$ の r 次モーメントは、

$$E[\{x(t)\}^r] = \int_0^\infty x^r f_x(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \{E[Y_n^r] \cdot P_n(t)\}, \quad \text{∴ } Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n,$$

で計算される。 $E[\cdot]$ は期待値オペレータである。いま各 step が独立である場合、 $E[Y_n^r]$ は、 r 次以下の n の多項式 (係数は $\{X\}$ の特性量) であるから、 $E[\{x(t)\}^r]$ は $N(t)$ の r 次以下のモーメントだけで与えられることになる。そして、分散モデルの一般化を図った場合に計算上の難点となるのはこの $N(t)$ のモーメントである。ところで、

$$P_n(t) = \int_0^t [f_T^{(n)}(\tau) - f_T^{(n+1)}(\tau)] d\tau$$

であり、 $f_T(\tau)$ の Fourier 変換を $\phi_T(u)$ と表わす ($\phi_T(u)$

$= \mathcal{F}[f_T(\tau)]$) と結局、

$$E[\{N(t)\}^r] = \int_0^t \mathcal{F}^{-1}[(1-\phi_T) \sum_{n=0}^{\infty} n^r \phi_T^n] d\tau$$

と計算される。 $\mathcal{F}^{-1}$ は Fourier 逆変換であり、 $\sum$ の部分

は無限等比級数を利用 ($|\phi_T| < 1$) に求められる。この手順を図-4 に示しておく。なお、ここで扱う確率変数は非負であるから、上記の Fourier 変換は Laplace 変換に読み換えた方が実際計算を行なう場合容易となることもある (指数分布あるいは一部の gamma 分布では容易に解析的な計算が行なえる)。

いま一次のモーメントだけを示すと、 $E[x(t)] = E[X] \int_0^t \mathcal{F}^{-1}[\phi_T/(1-\phi_T)] d\tau$ となる。

分布形を規定しての計算例については講演時に示す。なお、こうした分布形による差異が顕著なのは x, t とも小さい時に step 数が十分大きくなると中心極限定理を用いて普遍的な漸近挙動をとることも示される。

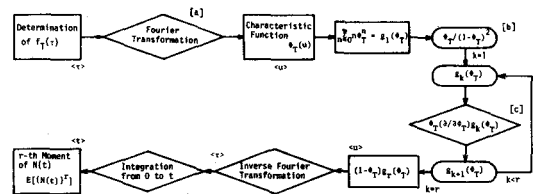


図-4 $E[\{N(t)\}^r]$ の計算手順

<参考文献> 1) 中川・辻本: 京大防災研報, 1976, 2) Yang & Sayre: Proc. ASCE, HY, 1971, 3) Grigg: Proc. ASCE, HY, 1970.