流出系の定数・状態量の逐次推定

京都大学工学部 正員 高棹琢馬
京都大学工学部 正員 椎葉充晴
京都大学大学院 学生員 ○森川雅行
京都大学大学院 学生員 乗京正弘

1. はじめに 普遍的な流出解析法を得るためには、流域内部の雨水の流れ構造とその相互関係の構造を明らかにしつつ、流出流量をこれらの諸機構の総合的結果として把握することが必要である。この点を考慮して、流出機構の未知定数の同定・初期値の推定を行なわなければならない。本研究は、以下に述べる準線形化法・逐次推定法の手法を用いて、実際に我々が流域から得る降雨ー流出流量データから流出システムの未知パラメータ・状態量の推定をより普遍的に行なおうとするものである。

2. 準線形化法による流出システムのパラメータ・雨水貯留量推移の推定 準線形化法とは、流出システムを表す常微分方程式群を線形化した線形方程式群を用いて、最小二乗法の適用により、未知構造パラメータと状態量を一連の降雨ー流出流量データから推定しようとする手法である。

いま、流出システムがベクトル記法で以下のように表わされているとする。

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = f(x, Y(t)) & i = 1, \cdots, m \\ \dfrac{dx_i}{dt} = 0.0 & i = m+1, \cdots, N \end{cases} \qquad (1)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}, \qquad f(x, Y(t)) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_N, Y(t)) \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_N, Y(t)) \\ \cdots \\ f_N(x_1, x_2, \cdots, x_N, Y(t)) \end{bmatrix} \qquad (2)$$

ここで、$x_{m+1} = U_1, x_{m+2} = U_2, \cdots, x_N = U_m$ である。ただし、x は状態量，m は状態量の数，U は構造パラメータで、m はその数で $N = m + m$ である。$f(x, Y(t))$ はベクトル値関数である。

そして、このシステムからの出力は

$$Y = g(x) \qquad (3)$$

として与えられるものと考える。

時刻 $t_1, t_2, \cdots, t_M$ で $Y(t_1), Y(t_2), \cdots, Y(t_M)$ の値が観測されているものとし、

$$S = \sum_{a=1}^{M} \left[g(x(t_a)) - D(t_a) \right]^2 \qquad (4)$$

を最小にするように $x(0)$ を決定する。ここで $D(t_a)$ は $Y(t_a)$ の観測値である。

この問題を準線形化の反復法で解くのであるが、以下に概略を述べる。

いま反復ステップを添字 k で表し、k ステップでの $x(t)$ の初期値ベクトル推定値を b^k、システムの状態ベクトルを $x^k(t)$ とする。

まず、任意に b^0 を与え、(1) 式を初期条件 $x(0) = b^0$ のもとで解き、その解を $x^0(t)$ とする。次に第 k ステップから第 $k+1$ ステップに移る時を考える。b^k および $x^k(t)$ が得られているとすると、(1)式，(3)式を $x^k(t)$ のまわりに Taylor 展開して一次の項まで取ると、(4)式の右辺は b^{k+1} の二次式となり、S が最小値を取るように b^{k+1} を決定することにより、

$$\frac{\partial S}{\partial b^{k+1}} = 0 \qquad (5)$$

の関係が成立し、容易に b^{k+1} は決定される。このように反復することによって、未知パラメータ・状態量の推定をおこなうのである。

3. 逐次推定方程式による流出システムのパラメータ・雨水貯留量推移の推定

洪水調節用のダムを効果的に運用し、また予想される洪水災害に前もって対処するために、出水ハイドログラフをあらかじめ予測しておくことは重要である。そのためには、現在時刻Tでの雨水貯留分布を時々刻々推定することが、必要となってくる。

いま、流出システムがベクトル記法を用いて、以下のようにあらわされたとする。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathbf{f}(t, x) + \mathbf{k}(t, x) r_0 + \mathbf{k}(t, x) u \\ y &= g(t, x) = y_0 + v \end{aligned} \qquad (6)$$

ここで、x は雨水貯留量の分布を表すベクトルで、$\mathbf{f}, \mathbf{k}$ は m 次ベクトル値関数、r_0, y_0 は降雨および流量の観測値で、u, v はそれぞれの観測誤差である。

本研究では D.M.Detchmendy, R.Sridhar らの非線形フィルター理論を適用する。紙数の関係で誘導は省略するが、状態量 $x(T)$ の逐次推定子は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{dT} &= \mathbf{f}(T, \hat{x}) + \mathbf{k}(T, \hat{x}) r_0(T) + 2P(T) G(T, \hat{x}) \{ y_0(T) - g(T, \hat{x}) \} \\ \frac{dP}{dT} &= \mathbf{f}_{\hat{x}}(T, \hat{x}) + \mathbf{k}_{\hat{x}}(T, \hat{x}) r_0(T) + P(T) \{ \mathbf{f}_{\hat{x}}(T, \hat{x}) + \mathbf{k}_{\hat{x}}(T, \hat{x}) r_0(T) \}^{\nabla} \\ &\quad + 2P(T) \left[G\{ y_0(T) - g(T, \hat{x}) \} \right]_{\hat{x}} P(T) + \frac{1}{2} \mathbf{k}(T, \hat{x}) V^{-1}(T, \hat{x}) \mathbf{k}(T, \hat{x})^{\nabla} \end{aligned} \qquad (7)$$

ただし、$G(T, \hat{x}) = \left[\frac{\partial g}{\partial \hat{x}}(T, \hat{x}) \right]^{\nabla}$, $V(T, \hat{x}) = \mathbf{k}(T, \hat{x})^{\nabla} \mathbf{k}(T, \hat{x})$ で $\left[G\{ y_0(T) - g(T, \hat{x}) \} \right]_x$ は $m \times m$ 行列で、i 列が $\frac{\partial}{\partial \hat{x}_i} \left[G\{ y_0(T) - g(T, \hat{x}) \} \right]$ で与えられる。P は $m \times m$ 型の遷移行列、サフィックス $\hat{x}$ は $\hat{x}$ に関する偏微分を表す。∇ は転置を表す。

4. 実流域への適用

右図は、いままでに述べた手法を庄内川流出試験地香流川流域に適用した結果である。Fig.1 および Fig.2 は 1974年5月26日の出水データを、それぞれ準線形化法、逐次推定法で解析したものである。これからわかるように、両手法とも有力な流出解析法といえる。流出システムのパラメータ・雨水貯留量推定の結果、およびこれらに対する考察は講演時に述べることにしたい。

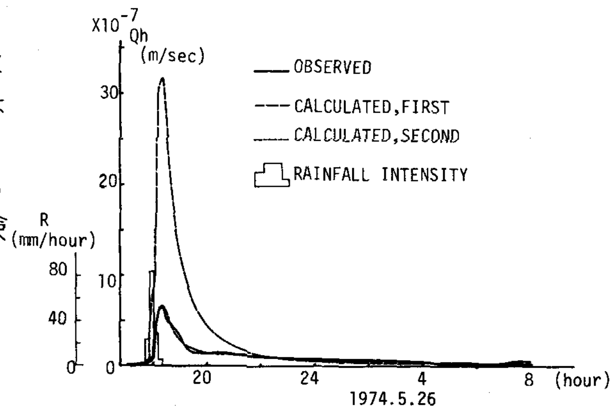

FIG.1 FLOW COMPARISON BY QUASILINEARIZATION

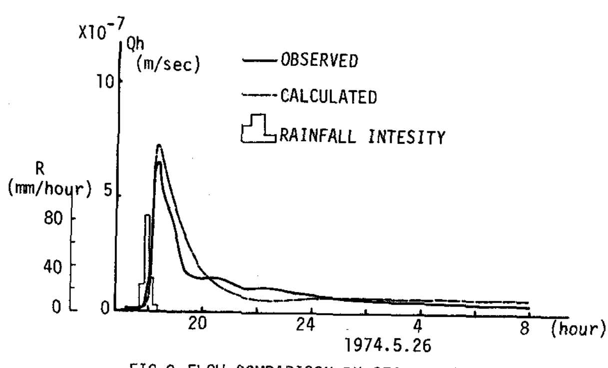

FIG.2 FLOW COMPARISON BY SEQUENTIAL ESTIMATION

《参考文献》

D.M.Detchmendy, R.Sridhar, Sequential Estimation of States and Parameters in Noisy Nonlinear Dynamic Systems, Transactions of ASME, June, 1966, pp 362～368