

特性曲線法による二次元不定流の計算

神戸大学工学部
神戸大学工学部

正 員 松梨 順三郎
学生員 〇田坂 昌彦

1. まえがき

二次元不定流は空間二変数の双曲型連立偏微分方程式で、これは特性曲線法によって数値積分することができる。特性曲線法はそれ自体問題の物理現象を反映しうる特色をもっている。本研究は、特性曲線法により固定格子点の手法に従って その二次元潮流場への適用を試みたものである。

2. 特性曲線法

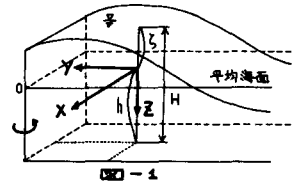
(1) 潮流解析の基礎方程式 静水面上に原点をとり、鉛直下方にZ軸をとった N-S 式を鉛直積分すると、

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + H \frac{\partial u}{\partial x} + H \frac{\partial v}{\partial y} + u \cdot (S_0)_x + v \cdot (S_0)_y = 0 \quad \text{Eq. of Continuity (1)}$$

$$g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g(S_f)_x - \Omega \cdot v - W_x = 0 \quad \text{Eqs. of Motion (2)}$$

$$g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g(S_f)_y + \Omega \cdot u - W_y = 0 \quad (3)$$

ここに 文字は図-1 の様であり、 ζ : 潮位、 u, v : X, Y 方向の流速、 Ω : コリオリ係数、 W_x, W_y : 単位質量当りの風力、 $(S_0)_x, (S_0)_y$: 海底勾配、 $(S_f)_x, (S_f)_y$: 摩擦係数である。なお 添字は X -成分、 Y -成分を表わす。



(2) 特性曲線 上記(1),(2),(3)式の左辺をそれぞれ L_1, L_2, L_3 で表わし次の線形結合を考える。¹⁾

$$L = L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 = L_1 + \left(\frac{C}{g} \cos \theta\right) L_2 + \left(\frac{C}{g} \sin \theta\right) L_3 = 0 \quad (4)$$

ここに 特性曲線を次式で定義し、

$$\frac{dx}{dt} = u + C \cos \theta, \quad \frac{dy}{dt} = v + C \sin \theta \quad ; C_0 \quad (5)$$

微分演算子 $\frac{D_0}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial t} + (u + C \cos \theta) \frac{\partial}{\partial x} + (v + C \sin \theta) \frac{\partial}{\partial y}$ を用いると、(4)式はこの特性曲線 C_0 に沿って次式のように変形される。

$$\frac{D_0 \zeta}{Dt} + \frac{C}{g} \cos \theta \frac{D_0 u}{Dt} + \frac{C}{g} \sin \theta \frac{D_0 v}{Dt} = -H \cdot P - F_r \quad (6)$$

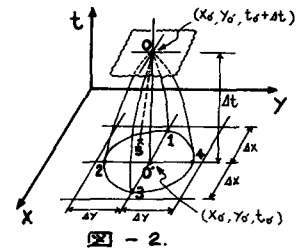
ここに $P = \frac{\partial u}{\partial x} \sin \theta - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial y} \cos^2 \theta$, $F_r = F_s + F_f + F_c + F_w$, $F_s = u \cdot (S_0)_x + v \cdot (S_0)_y$, $F_f = C \cdot \{(S_f)_x \cos \theta + (S_f)_y \sin \theta\}$, $F_c = -\frac{C}{g} \Omega (v \cos \theta - u \sin \theta)$, $F_w = -\frac{C}{g} (W_x \cos \theta + W_y \sin \theta)$ である。基礎方程式の線形結合は一次元流れでは特性曲線 $C_{\pm}$ に沿って方向微分の形にまとまる。一方、二次元流れでは(6)式に示すように右辺に偏微分項を含んでいる。これらの項を消去し、関係式を閉じた形で求めるために(1)式を変形して次式を追加する。ここに、 $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$ とする。

$$\frac{D \zeta}{Dt} = -H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - u \cdot (S_0)_x - v \cdot (S_0)_y = -H \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - F_s \quad (7)$$

(3) 差分化 さて、(6)式には未知量 u, v とそれらの偏微分項が含まれており、(6)と(7)式より u, v を求めるためには、 θ は $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ の四方向をとればよいことになる。それらの結果に差分近似を用いると次の四つの関係式を得る。

$$(\zeta_0 - \zeta_1) + \frac{C}{g} (u_0 - u_1) = -\Delta t H_0 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_0 - \Delta t (F_{r1})_0, \quad \theta = 0 \quad (8)$$

$$(\zeta_0 - \zeta_2) + \frac{C}{g} (u_0 - u_2) = -\Delta t H_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 - \Delta t (F_{r2})_0, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad (9)$$



$$(z_0 - z_3) - \frac{C_0}{g}(u_0 - u_3) = -\Delta t H_0 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_0 - \Delta t (F_3)_0, \quad \theta = \pi \quad (10)$$

$$(z_0 - z_4) - \frac{C_0}{g}(u_0 - u_4) = -\Delta t H_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 - \Delta t (F_4)_0, \quad \theta = \frac{3\pi}{2} \quad (11)$$

また、(7)式を0点を通る流線に沿って差分化すると、

$$(z_0 - z_5) = -\Delta t H_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)_0 - \Delta t (F_5)_0 \quad (12)$$

以上、(8)~(12)式の五個の式について含まれる未知量は、 $z_0, u_0, v_0, \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0, \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_0$ の五個である。最初に $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0, \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_0$ を消去して偏微分項を除くと未知量 z_0, u_0, v_0 について解くことができる。添字は図-2の各点を示している。

3. 計算手法

固定点法は、特性曲線の交点を格子点上にもってこようとする方法である。特性曲線の出発する位置を仮定し、繰り返し計算によって収束させるのである。

- (1) 最初の計算では、特性曲線と既知時間平面との交点 1, 2, 3, 4 が各格子点にあるものとし、point 5 は 0 点にあるとして 0 点の z, u, v を求める。

図-2及び図-3 この場合、各特性曲線は0点で一致して交わらないかもしれないが求めたら、 u, v は0点での値とする。

- (2) 求めた0点の z, u, v を用いて0点より既知時間平面に特性曲線(5式を使用)及び流線をおろし、新たに1, 2, 3, 4及びPOINT 5の位置を決める。

POINT 1~5の z, u, v を格子点の z, u, v より補間を求める。 図-4

- (3) (2)で述べたPOINT 1~5より特性曲線及び流線を出し、再び0点での z, u, v を求める。

- (4) (2)と(3)の繰り返しにより解を収束させる。

4 数値計算

本計算のモデルとして大阪湾をとりあげ、大潮(M₂+S₂)時の計算を試みる。格子間隔 2 Km, 時間ステップ 30秒とし、初期条件、自由境界は参考文献(2)を参照した。固定境界はもよりの海の中の値で外挿し法線方向の流速は零とした。

5 計算結果

大阪湾中央部において計算開始後4時間(時間ステップ 480)で干潮位となり、この時の潮位は -23cm ~ -26cm である。また、これから20分後に友島水道で北流の最大値 134.4 cm/sec、さらに20分後に明石海峡の東流の最大値 132.4 cm/sec が得られる。また、図-5は潮流の第1次近似計算である。流向

模様に疑問があるが、現在台形則による第2次近似計算をすすめている。その結果は、講演時に発表する。

[参考文献] 1) C. Lai ; "Some Computational Aspects of one- and two- Dimensional Unsteady Flow Simulation by the Method of Characteristics."

INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON Unsteady flow in open channels April 12th-15th, 1976.

2) 大阪湾潮流高潮計算報告書 運輸省第三港湾建設局神戸調査設計事務所 昭和46年6月。

