

不規則波のrunについて

京都大学工学部 正〇木村 晃・学 阪本幸二

1. はじめに. 従来の不規則波浪の波高の確率特性に関する研究では, 波高の大きな波の出現頻度を推定することが主たる目的であった. 一方, 以下に示す連(run)の研究は, 波高の大きな波がどの程度引きついで来襲するかを知ることを目的とするものである. すでに合田は隣り合う波の波高に従属性がない場合, 基準波高 H_0 を越える波の連の長さ l の確率分布が $P_2(l) = p^{l-1}q \cdots (1)$ で与えられることを示した. ここに, p は $H < H_0$ を越える確率であり, $q = 1 - p$ である. その後, 合田・永井・伊藤, Wilson・Baird, Rye, Siefert らの研究により, 現世波浪の連の長さでは, 式(1)で与えられるものよりも幾分大きな値を示すことがわかった. これは, 合田が隣り合う波高の相関を無視したためと考えられている. そこでここでは, 不規則波の波高の時系列をマルコフ連鎖であると仮定し, 隣り合う波相互の相関を考慮にいれて, その連の特性について検討する.

2. 連の確率分布. マルコフ連鎖において, 初期状態を示す確率マトリクスを P_0 とおき, 推移確率行列を (2) 式のように示すと, n 段階推移後の確率マトリクス $P_n(n)$ は式(3)で与えられる.

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots \\ P_{21} & P_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdots (2), \quad P_n(n) = P_0 P^{(n)} \cdots (3)$$

ここで, 式(2)の行列要素 P_{ij} は 1 段階の推移で状態 i から状態 j になる確率である. 波高の連は, ある時点で $H \geq H_0$ となった時より始まり, 初めて $H < H_0$ になった時に終わる. (したがって, 考えるべき状態は $H \geq H_0$ の $H < H_0$ の 2 つである. いま $H < H_0$ の状態を添字 1, $H \geq H_0$ の状態を添字 2 をつけて示すと, $H \geq H_0$ となる波高の連について検討する場合, 初期確率 (p_1, p_2) を $(0, 1)$ とすればよい. また式(2)は 2 行 2 列の行列式になるが, その要素のうち P_{11}, P_{22} はともに初期状態が $H < H_0$ の場合の推移確率であり, $H \geq H_0$ の連の定義には関係ないので, 共に 0 とおくと最終的に式(2)は式(4)のようになる. この式を式(3)に代入することにより, $P_1(1) = (P_{21}, P_{22})$, $P_1(2) = (P_{22}P_{21}, P_{22}^2)$

となり, 簡単な帰納計算より, $P_1(n) = (P_{22}^{n-1}P_{21}, P_{22}^n)$ となる. それぞれの状態における確率マトリクスの意味するところを, $P_1(n)$ の要素を用いて説明する. $P_{22}^{n-1}P_{21}$ は $H \geq H_0$ なる波が n 波つらなり, $n+1$ 波目に $H < H_0$ となる確率, すなわち, $H \geq H_0$ なる波高の連の長さ n となる確率を与える. このことから連の長さ l の確率分布は式(5)のように与えられる. また, その

$$P_2(l) = P_{22}^{l-1}P_{21} \cdots (5) \quad \text{平均値ならびに標準偏差は式(6), (7)で与えられる. また同様の論議から}$$

$$\bar{l} = \frac{1}{P_{21}} \cdots (6) \quad H < H_0 \text{ となる波高の連の確率分布は式(8)のように与えられる. つきにこれらの積}$$

$$P(l) = P_{22}^{l-1}P_{21} \cdots (7) \quad P(l') = P_{11}^{l'-1}P_{12} \cdots (8) \quad \text{果もともに高波のくり返し来襲間隔の確率分布を}$$

導く. いま隣り合う連の間には相関関係がないと仮定すれば, 高波のくり返しの連の長さ l_0 の出現確率は次式のように定められる. いま, $l_0 = l + l'$ であることから,

$$P_3(l_0) = \sum_{l=1}^{l_0-1} P_2(l) P_1(l_0-l) = \frac{(1-P_{11})(1-P_{22})}{P_{11} - P_{22}} (P_{11}^{l_0-1} - P_{22}^{l_0-1}) \cdots (9)$$

となる. また l_0 の平均値は式(10)で与えられる. これは式(6), (8)からもわかるように, それぞれ $H \geq H_0$, $H < H_0$ の連の平均長の和となっており, 連相互の独立を仮定した結果で首肯できる. 以上の結果から, 推移確率 P_{ij} ($i, j = 1, 2$) がわかれば, 連の特性はほぼ推定できることがわかる. 一般に波高の確率分布はいずれの場合にもほぼ Rayleigh 分布に従うことが知られている. したがって, ここでは推移確率も次式で示す2次元

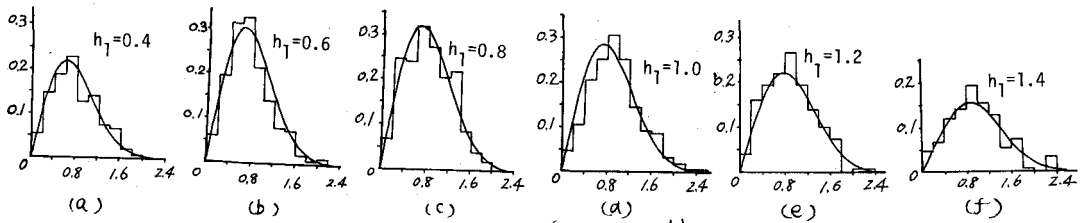


図-1. データと2次元Rayleigh分布の比較

$$\bar{C}_0 = 1/(1-P_{11}) + 1/(1-P_{22}) \dots (10)$$

Rayleigh 分布の条件付確率分布で与える。ここに h_0 は H/H_{rms} , h_1, h_2 は初期状態および推移後の波であることを表わし、共に H_{rms} で正規化した。

$$\left. \begin{aligned} P_{11} &= \int_0^{h_0} \int_0^{h_0} P(h_2/h_1) dh_1 dh_2, & P_{12} &= \int_0^{h_0} \int_{h_0}^{\infty} P(h_2/h_1) dh_1 dh_2 \\ P_{21} &= \int_{h_0}^{\infty} \int_0^{h_0} P(h_2/h_1) dh_1 dh_2, & P_{22} &= \int_{h_0}^{\infty} \int_{h_0}^{\infty} P(h_2/h_1) dh_1 dh_2 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$F.F. \text{し, } P(h_2/h_1) = \frac{2}{1-4\rho^2} h_1 I_0\left(\frac{h_1 h_2 \rho}{\frac{1}{4}-\rho^2}\right) \exp\left\{-\frac{1}{1-4\rho^2}(h_1^2+h_2^2) + h_1^2\right\} \quad (12)$$

である。ここに $I_0(\quad)$ は変形ベッセル関数、 $4\rho^2$ が h_1^2 と h_2^2 の相関係数に一致する。

3. 実験値との対応。図-1(a)~(f) は相互に1つずつ波高の結合確率分布と2次元Rayleigh分布との対応を検討したものである。図は $h_1=0.4$ から0.2きざみで1.4までの6つの断面について示したが、いずれもデータと実線で示した2次元Rayleigh分布との対応は良好である。この結果より、推移確率を式(11)のようにおいてよいことがわかる。図-2(a),(b),(c) はそれぞれ基準波高として H_{mean} , H_{rms} , $H_{1/3}$ をえらび、それを越える波の連の頻度分布を示したものである。図中の実線が式(5)、破線が式(1)であり、いずれの場合もデータは実線とよく一致していることがわかる。また、図-3は式(9)の検証を行なったものであるが、この場合もデータと理論式の対応は良好である。

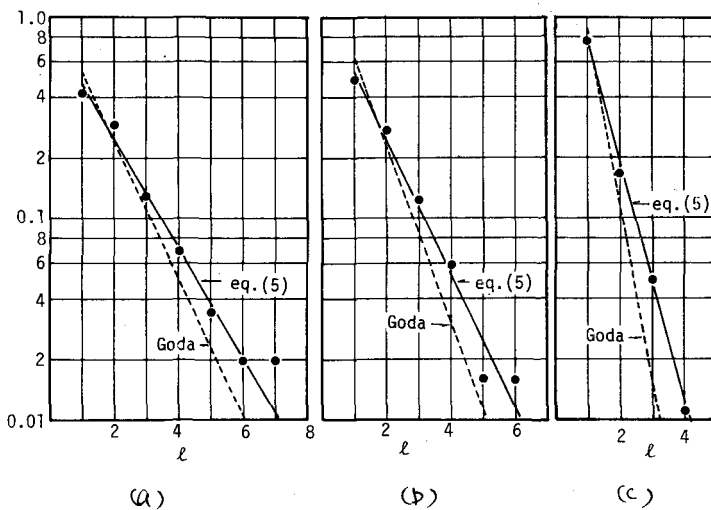


図-2 標準波高を超過する連の確率分布

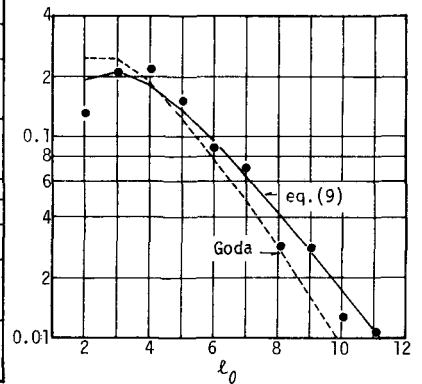


図-3 高波のくり返しの確率分布 (基準波高は平均波高)