

有限要素法による Kinematic Wave の解析

神戸大学工学部
神戸大学工学部

正員 ○神吉 和夫
正員 松梨 順三郎

1. まえがき

有限要素法は差分法と異なる原理にもとづく有力な微分方程式の数値解法として、流れ解析においても広汎に応用されている。ここでは、一次元流れで重要な Kinematic Wave の解析を、距離方向の離散化に Galerkin 法を用いた有限要素法、時間方向は代表的な Explicit 公式である 4 次の Runge-Kutta 法を適用して行なう。

2. 基礎方程式

Kinematic Wave の例として、不透水斜面上での降雨入力による流出を考える。基礎方程式は次式で与えられる。図-1

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = r \quad (1) \quad q = \alpha h^m \quad (2) \quad t \geq 0, 0 \leq x \leq L$$

式(2)を式(1)に代入して、

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha h^m)}{\partial x} - r = 0 \quad (3) \quad \text{ここで、} t: \text{時間}, x: \text{距離}$$

h : 水位, q : 流量, r : 降雨強度, L : 斜面長さ, α, m : 定数である。

境界条件, 初期条件は, $h(0, t) = 0$ (4) $h(x, 0) = 0, \alpha x \leq L$ (5)
とし、さらに降雨強度は場所的に不変とする。

斜面を図-2 のように n 個の区間に分割し、各区間で未知量を次式で近似する。

$h(x, t) = \sum_j N_j(x) \cdot h_j(t)$ (6) ここで、 N_j : 内そう関数, h_j : 区間内節点 j の水位
距離方向に Galerkin の重み付き残差法を適用すると、基礎式は

$$\sum_k N_k \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha h^m)}{\partial x} - r \right\} dx = 0 \quad (7)$$

今、内そう関数を線形とし、式(6)を式(7)に代入して各節点に関する方程式を求める。内部節点 i について考えると、区間 ② からの寄与は、

$$\frac{1}{6} l_i \dot{h}_{i-1} + \frac{1}{3} l_i \dot{h}_i + \frac{1}{6} l_i \dot{h}_{i+1} - \frac{\alpha}{m+1} F(h_i, h_{i-1}) - \frac{1}{2} l_i r \quad (8)$$

区間 ④ からの寄与は

$$\frac{1}{6} l_{i+1} \dot{h}_i + \frac{1}{3} l_{i+1} \dot{h}_{i+1} - \frac{\alpha}{m+1} F(h_{i+1}, h_i) - \frac{1}{2} l_{i+1} r \quad (9)$$

式(8)、式(9)を合計して、節点 i について次式となる。

$$\frac{1}{6} l_i \dot{h}_{i-1} + \frac{1}{3} (l_i + l_{i+1}) \dot{h}_i + \frac{1}{6} l_{i+1} \dot{h}_{i+1} - \frac{\alpha}{m+1} \{ F(h_i, h_{i-1}) - F(h_{i+1}, h_i) \} - \frac{1}{2} (l_i + l_{i+1}) r = 0 \quad (10)$$

同様に下流端で

$$\frac{1}{6} l_n \dot{h}_{n-1} + \frac{1}{3} l_n \dot{h}_n + \frac{\alpha}{m+1} F(h_n, h_{n-1}) - \frac{1}{2} l_n r = 0 \quad (11)$$

ここで、 $\dot{}$ は時間微分, l_i : 区間 ② の長さ, $F(x, y) = (x^{m+1} - y^{m+1}) / (m+1)(x - y)$ $x \neq y$, $F(x, y) = (m+1)x^m$ $x = y$ (12)

解くべき方程式を行列を用いて示すと、

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_1 & b_2 & c_2 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & 0 & & a_n + b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \quad (13) \quad \text{ここで} \quad b_i = \frac{1}{3} (l_i + l_{i+1}) \quad i=1, 2, \dots, n-1, \quad b_n = \frac{1}{3} l_n, \quad c_i = c_i = \frac{1}{6} l_{i+1} \quad i=1, 2, \dots, n-1$$

$$d_i = \frac{\alpha}{m+1} \{ F(h_i, h_{i-1}) - F(h_{i+1}, h_i) \} + \frac{1}{2} (l_i + l_{i+1}) r \quad i=1, 2, \dots, n-1$$

$$d_n = \frac{\alpha}{m+1} F(h_n, h_{n-1}) - \frac{1}{2} l_n r \quad \text{ただし } h_0 = 0$$

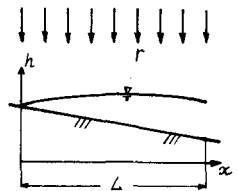


図-1 流れモデル

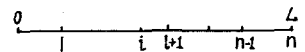


図-2 区間分割

3. 時間方向の離散化

A.W.Jayawardena 等, G.Al-Mashidani 等は Crank Nicholson スキームなどの Implicit 公式を適用し良好な結果を得ている。Implicit 公式を用いた場合, 式(13)が未知量 h について非線形であるため何らかの方法で非線形代数方程式を解かなければならない。

一方, Explicit 公式を用いれば, 式(13)の左辺係数行列の逆行列を一回求め方程式を標準形に変換することにより, 逐次計算が可能である。しかし安定性の面からは, Implicit 法に劣ると言われ, 一般により小さな時間きざみを必要とする。

ここでは代表的な Explicit 公式である 4 次の Runge-Kutta 公式の適用を試みる。この公式は微分方程式 $\dot{u} = f(u, t)$ に対して, 時間 Δt だけ進んだ値を,

$$u(t+\Delta t) = u(t) + \frac{\Delta t}{6} \{ k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4 \} \quad (14)$$

$$\text{ここで } k_1 = f\{u(t), t\}, k_2 = f\{u(t) + \frac{\Delta t}{2} k_1, t + \frac{\Delta t}{2}\}$$

$$k_3 = f\{u(t) + \frac{\Delta t}{2} k_2, t + \frac{\Delta t}{2}\}, k_4 = f\{u(t) + \Delta t k_3, t + \Delta t\}$$

で求めるもので 4 次の精度を持ち, 安定性の保証はないが, Δt を小さくすることで良好な解が得られる。

なお, 式(13)の係数行列は三項行列であるので, Runge Kutta 公式を用いるとき, 必要な量を各時刻で三項方程式を解いて求める方が良いと思われる。

4. 計算例

等流公式として Manning 式を用いる。 $m = 5/3$ 。

図-3 は $n=10$, $l_i=10.0^m$ (等間隔), $\alpha=5.0^{m^3 sec^{-1}}$, $\Delta t=120^{sec}$, $r=10.0^{mm/hr}$ $t \geq 0$ を与え, 時刻 $t=6, 12$ および 18^{min} 後の距離方向の水位変化を示す。この場合, 解析解が与えられており次式で与えられる。

$$h = \left(\frac{\alpha r}{\alpha}\right)^{1/m} x < x_w, h = r t \quad x > x_w, x_w = \alpha m \int_0^{t_c} dt \quad t < t_c$$

$$h = \left(\frac{\alpha r}{\alpha}\right)^{1/m} t > t_c \quad t_c: \text{集中時間, ここでは } t_c = 1007^{sec}.$$

計算値との一致は良好である。図-4 は図-3 と同じデータで降雨継続時間を 3600^{sec} としたときの斜面下流端の hydrograph を示す。同様に図-5 は区間長を上流から $2.5, 5.0, 5.0, 7.5, 10.0, 12.5, 12.5, 15.0, 15.0, 15.0^m$ としたときの hydrograph を示す。この場合も解析解が与えられるが, 計算値との一致は良好である。

参考文献

1) P.S.Eagleson: Dynamic hydrology, McGraw-Hill, 1970. 2) 川原: 第24回海講, 1977. 3) A.W.Jayawardena & J.K.White: J. Hydrology, 34, 1977. 4) G.Al-Mashidani & C.Taylor: Finite Element Methods in Flow Problems, IAH Press, 1974.

