

ケーブル部材を有する骨組構造の弾塑性解析

大阪大学工学部 正 員 前田 幸雄
 大阪大学工学部 正 員 林 正
 大阪大学大学院 学生員 柄 一
 大阪大学大学院 学生員 森 寛司

1. まえがき

ケーブル部材を有する骨組構造のマトリックス法による非線形解析では、ケーブル部材をリンク構造に置き換えれば、トラス部材の計算式を用いてサゲの影響を考慮した解析を行うことができる。しかし、リンク構造を用いると未知量が増加するため、計算の効率性は著しく悪くなる。そこで本文では、弾性解析の場合¹⁾と同じように、ケーブル部材を分割せずに、サゲの影響を考慮した平面ケーブル部材の弾塑性解析の計算式を誘導した。骨組部材の解析法については省略する。

2. ケーブル部材の解析

(1) 解析仮定：ケーブル部材の解析では、次の仮定を用いた。

- 1) 荷重はケーブルの全長にわたって鉛直方向に等分布載荷する。
- 2) ケーブルの形状は、弾塑性状態においても放物線とする。
- 3) 材料は、図-1のような理想硬化弾塑性体とする。

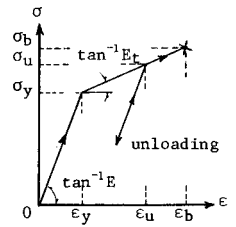


図-1 ケーブルの応力-ひずみ曲線

ケーブルの任意な断面の応力とひずみを σ, ε とすると、仮定3)より各応力状態に応じて次の関係式が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \sigma / E & (\text{弾性}), & \quad \varepsilon = \sigma / E + (\sigma_y - \sigma_u) (1/E - 1/E_t) & (\text{除荷}), \\ \varepsilon &= \sigma / E_t + \sigma_y (1/E - 1/E_t) & (\text{塑性}), & \quad \varepsilon_b = \sigma_b / E_t + \sigma_y (1/E - 1/E_t) & (\text{破断}) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(2) ケーブルの塑性域：図-2のように変形後の状態において座標系 (x, y) を定め、以下の無次元量を定義する。

$$n = f/l, \quad m = h/l, \quad \xi = x/l, \quad \eta = y/l \quad (2)$$

図-2のようなケーブルではA端から塑性が始まり、 x_1 まで塑性化が進行したものとす。また、除荷が起きた後に再び塑性負荷の状態にある部分を x_2 で示す。塑性域の座標を ξ_0 で表わすと、図-3の場合も含めて一般的に次式のようなになる。

$$\xi_0 = (4n + m) / 8n \pm \sqrt{T_y^2 - H^2} / W \quad (0 \leq \xi_0 \leq 1) \quad (3)$$

ここに、 T_y は降伏張力 ($T_y = \sigma_y A$)、 W は全荷重 ($W = wl$) を表わす。

(3) ケーブル方程式：ケーブルの伸び ΔC 、ケーブル全長 C 、弾性状態とした場合の伸び ΔC_e と、塑性域 C_p による補正伸び ΔC_p 、除荷域 C_u による伸び ΔC_u 、塑性域と除荷域の両方 C_{pu} による伸び ΔC_{pu} を用いて次式のように表わす。ただし、 $\bar{\sigma}_u$ は除荷時における C_u 部分の平均応力である。

$$\Delta C = \Delta C_e + \Delta C_p + \Delta C_u + \Delta C_{pu} \quad (4)$$

$$\Delta C_e = \frac{Hl}{EA} \int_0^1 \left\{ 1 + \left(\frac{dz}{d\xi} \right)^2 \right\} d\xi, \quad \Delta C_p = \frac{Hl}{EA} \left(\frac{E}{E_t} - 1 \right) \int_{C_p} \left\{ 1 + \left(\frac{dz}{d\xi} \right)^2 \right\} d\xi \quad (5)$$

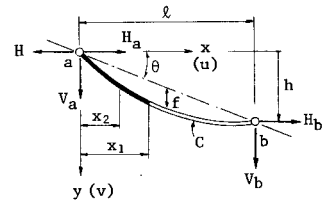


図-2 放物線ケーブル

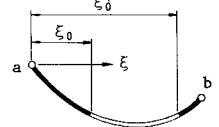


図-3 塑性域

$$\Delta C_u = \frac{\sigma_{ul}}{E} \left(\frac{E}{E_t} - 1 \right) \int_{C_u} \sqrt{1 + \left(\frac{d\gamma}{dz} \right)^2} dz, \quad \Delta C_{pu} = - \frac{\sigma_{ul}}{E} \left(\frac{E}{E_t} - 1 \right) \int_{C_{pu}} \sqrt{1 + \left(\frac{d\gamma}{dz} \right)^2} dz \quad (6)$$

変形後のケーブルの適合条件は、ケーブルの無応力長を C_0 として次式で与えられる。

$$C - \Delta C - C_0 = 0 \quad (7)$$

式(7)に変形後のケーブル長 C と式(4)を代入し、さらに両辺に n を乗じた式を ψ とおくと、

$$\psi(n) = \frac{\ell}{16} S - \frac{W\ell}{8EA} \left(1 + \frac{16}{3} n^2 + m^2 \right) - \frac{\ell}{16} \left(\frac{1}{E_t} - \frac{1}{E} \right) \left(\frac{2W}{A} I_p - \sigma_u J_u + \sigma_y J_{pu} \right) - n C_0 = 0 \quad (8)$$

ここに、

$$S = (4n+m)\sqrt{1+(4n+m)^2} + (4n-m)\sqrt{1+(4n-m)^2} + \log_e \left\{ \frac{4n+m+\sqrt{1+(4n+m)^2}}{4n-m+\sqrt{1+(4n-m)^2}} \right\} \quad (9)$$

また、 I_p, J_u, J_{pu} は次式の不定積分に塑性域または除荷域の積分区間を代入したものである。

$$I = \int \left\{ 1 + \left(\frac{d\gamma}{dz} \right)^2 \right\} dz = \int \left\{ 1 + (4n+m)^2 \right\} dz - 8n(4n+m)z^2 + \frac{64}{3} n^2 z^3 \quad (10)$$

$$J = -16n \int \sqrt{1 + \left(\frac{d\gamma}{dz} \right)^2} dz = (4n+m-8n3)\sqrt{1+(4n+m-8n3)^2} + \log_e \left\{ \frac{4n+m-8n3+\sqrt{1+(4n+m-8n3)^2}}{4n-m+\sqrt{1+(4n-m-8n3)^2}} \right\} \quad (11)$$

式(8)が、複合非線形解析におけるケーブル方程式である。ケーブルの負荷履歴に関する諸量と、境界条件として ℓ, h を与えれば、式(8)はサグ比 n のみの関数になる。

(4) 接線剛性行列：マトリックス解析に必要なケーブル部材の接線剛性行列は、ある増分段階を基準状態とした増分形式で表わされる。この行列は弾性解析の場合¹⁾と同じように、式(8)から ℓ, h, f の増分関係式を求め、この式に部材端変位の増分 ΔD と部材端力の増分 ΔF を代入すれば、通常トラス部材と同じ形の式を導くことができる。

$$\Delta F = T \Delta k T^T \Delta D, \quad \Delta F = \{\Delta H_a, \Delta V_a, \Delta H_b, \Delta V_b\}^T, \quad \Delta D = \{\Delta u_a, \Delta v_a, \Delta u_b, \Delta v_b\}^T \quad (12)$$

$$T = \begin{bmatrix} T^* & 0 \\ 0 & T^* \end{bmatrix}, \quad T^* = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \Delta k = \begin{bmatrix} k^* & -k^* \\ -k^* & k^* \end{bmatrix}, \quad k^* = k \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$k = \frac{EA}{L} \left[Y_1 - \frac{16}{3} \left(\frac{\ell}{L} \right)^2 n^2 Y_3 + \frac{128EA}{3W} \left(\frac{\ell}{L} \right)^4 n^3 \right]^{-1}, \quad a = \frac{C_0^2}{L} + \frac{W}{EA} \left(\frac{h}{L} \right) Y_2, \quad (14)$$

$$b = \left(1 - \frac{C_0^2}{L} \right) - \frac{W}{EA} \left(\frac{h}{L} \right) Y_2 - \frac{4W}{3EA} \left(\frac{\ell}{L} \right) n Y_3 + \frac{40}{3} \left(\frac{\ell}{L} \right)^4 n^2, \quad L = \sqrt{\ell^2 + h^2}$$

C_0 は基準状態におけるケーブル長さであり、 Y_1, Y_2, Y_3 は塑性域の座標値 z_0, z_1 に関する値である。

$$C_0^2 = C_0 + \Delta C_u + \Delta C_{pu}, \quad Y_1 = 1 + \left(\frac{E}{E_t} - 1 \right) X_1, \quad Y_2 = \left(\frac{E}{E_t} - 1 \right) (X_1 - X_2), \quad Y_3 = 1 + \left(\frac{E}{E_t} - 1 \right) (3X_1 - 6X_2 + 4X_3) \quad (15)$$

$$X_1 = z_0, \quad X_2 = z_1^2, \quad X_3 = z_0^3 \quad (a \text{ 端側が塑性化}); \quad X_1 = 1 - z_0^3, \quad X_2 = 1 - (z_0^2), \quad X_3 = 1 - (z_0^3) \quad (b \text{ 端側が塑性化}) \quad (16)$$

3. 数値計算例

以上の計算式の精度

を確認するために、図-4に示す単一ケーブルについて数値計算を

行った。また、ケーブルを20等分割してリンク構造に置き換えた場合の値も求めた。計算に用いた諸量は次の通りである。

$$C_0 = 200, \quad A = 0.01, \quad E = 2.0 \times 10^9, \quad E_t = 1.55 \times 10^6, \quad \sigma_y = 1.062 \times 10^5, \quad \varepsilon_b = 0.04$$

計算結果の一部を表-1に示した。両者の差は最大0.6%で良く一致しているが、本解析法では計算時間と記憶容量が極めて少ないので、複雑な構造物の解析に適用できる。

1) 前田・林・前田(研)：サグを考慮したケーブル部材の計算式，土木学会論文報告集，No. 257, 1977.

表-1 水平反力の比較

Load (W)	200	400	523.5*	600	800	1000	1204.3**
Sag ratio	0.114	0.144	0.157	0.171	0.212	0.252	0.289
H	Sag	218.7	347.5	416.0	439.7	471.5	496.6
	Link	217.9	346.5	414.8	438.3	469.2	493.9

* Yielding load : 520.4 (for sagging cable)

** Breaking load : 1213.6 (for sagging cable)

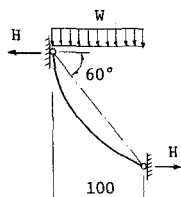


図-4 計算例