土木構造物のカタストロフィーに関する基礎的考察

京都大学工学部　正　員　丹羽義次
京都大学工学部　正　員　渡辺英一
京都大学大学院　学生員○勇　秀憲

1．　まえがき

構造物、特に鋼構造物では、ある一方向の寸法が他の方向の寸法に比べて極端に小さくなる場合に、その構造物は不安定な状態を示すことがある。このような静的不安定現象はポテンシャルエネルギー論によって、(1)飛移　(2)非対称座屈　(3)安定対称座屈　(4)不安定対称座屈　の4つに分類される。(Fig.1 参照)

1，2自由度系の力学モデルによって、この分類を調べることは容易なことであるが、実際の構造物は多自由度系であり、4つの現象が複雑に組み合わさり干渉しあっている。本研究は、特に、「座屈」について、簡単な多自由度系モデルを有限要素法によって定式化し、実際に数値解析を行ない、不安定性の考察を行なうものである。

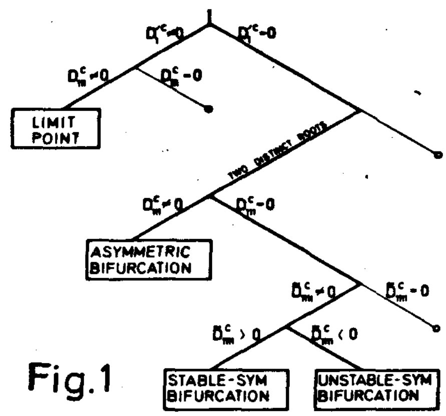

Fig.1

2．　解析手法（安定対称座屈モデル）

系のポテンシャルエネルギー

$$V=\frac{1}{2}[K_{ij}^{*}]\Delta_i\Delta_j-P_i^{*}\Delta_i \qquad (1)$$

系のつりあい条件式

$$[K_{ij}^{**}]\begin{Bmatrix} u_j^E \\ w_j^E \end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix} P_i \\ Q_i \end{Bmatrix}=0 \qquad (2)$$

ここに　$(\Delta_i)^T=(u_i,w_i)$　u_i：面内変位　w_i：面外変位

$(P_i^*)^T=(P_i,Q_i)$　P_i：面内等価節点力　Q_i：面外等価節点力

$$[K^*]=[K^0]+\frac{1}{3}[K^{I}]+\frac{1}{6}[K^{II}]$$

$$[K^{**}]=[K^0]+\frac{1}{2}[K^{I}]+\frac{1}{3}[K^{II}]$$

$$[K^0]=\left[\begin{array}{c:c} K_{ij}^{P} & K_{ijk}^{PB}w_k^{I} \\ \hdashline K_{jik}^{PB}w_k^{I} & K_{ij}^{B}+K_{ijkl}^{BB}w_k^{I}w_l^{I} \end{array}\right]$$

$$[K^{I}]=\left[\begin{array}{c:c} 0 & K_{ijk}^{PB}w_k^{E} \\ \hdashline K_{jik}^{PB}w_k^{E} & K_{kij}^{PB}u_k^{E}+3K_{ijkl}^{BB}w_k^{I}w_l^{E} \end{array}\right]$$

$$[K^{II}]=\left[\begin{array}{c:c} 0 & 0 \\ \hdashline 0 & \frac{3}{2}K_{ijkl}^{BB}w_k^{E}w_l^{E} \end{array}\right]$$

$\{P_i\}=\lambda\{P_{i0}\}$　λ：荷重パラメータ　P_{i0}：荷重モード

ただし．添字 E：弾性変形，I：初期変形

座屈問題を扱うので初期たわみ $w_i^I\equiv 0$ および $Q_i\equiv 0$ とおく。

STEP Ⅰ　(2)式の面内のつりあいから

$$u_j^E=(K_{ij}^{P})^{-1}P_i-\frac{1}{2}(K_{ij}^{P})^{-1}K_{imn}^{PB}w_m^E w_n^E \qquad (3)$$

これを(2)式の面外のつりあいに代入し、$V=V(u_i^E,w_i^E,\lambda)$ を $V^*=V^*(w_i^E,\lambda)$ に変換する。

つまり、

$$\frac{\partial V^*}{\partial w_i^E}\equiv V_i^*\equiv\left[K_{ij}^{B}+\lambda K_{kij}^{PB}(K_{lk}^{P})^{-1}P_{l0}\right]w_j^E+\frac{1}{2}\left[K_{ijkl}^{BB}-K_{mij}^{PB}(K_{nm}^{P})^{-1}K_{nkl}^{PB}\right]w_j^E w_k^E w_l^E-Q_i\equiv 0 \qquad (4)$$

STEP Ⅱ　さらに系のポテンシャル V が極値をとるとき

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial w_i^E \partial w_j^E} = V^*_{ij} = \left[K^B_{ij} + \lambda K^{PB}_{kij} (K^P_{kl})^{-1} P_{l0} \right] + \frac{3}{2} \left[K^{BB}_{ijkl} - K^{PB}_{mij} (K^P_{nm})^{-1} K^{PB}_{nkl} \right] w^E_k w^E_l = 0 \qquad (5)$$

$$\frac{\partial^3 V^*}{\partial w_i^E \partial w_j^E \partial w_k^E} = V^*_{ijk} = 3 \left[K^{BB}_{ijkl} - K^{PB}_{mij} (K^P_{nm})^{-1} K^{PB}_{nkl} \right] w^E_l \qquad (6)$$

$$\frac{\partial^4 V^*}{\partial w_i^E \partial w_j^E \partial w_k^E \partial w_l^E} = V^*_{ijkl} = 3 \left[K^{BB}_{ijkl} - K^{PB}_{mij} (K^P_{nm})^{-1} K^{PB}_{nkl} \right] \qquad (7)$$

さて、(5)式の与える固有値問題を解き、固有値（座屈荷重）と固有モード（座屈モード）を決定する。さらに固有ベクトル行列を Φ_{ij} として、$w_i = \Phi_{ij} v_j$ と座標変換する。よって、$V^*(w_i^E, \lambda) = D(\Phi_{ij} v_j, \lambda) = D(v_j, \lambda)$ と変換される。

STEP 3　各モード α に対して $D_\alpha \equiv V^*_i \Phi_{i\alpha} \equiv 0$，$D_{\alpha\alpha} \equiv V^*_{ij} \Phi_{i\alpha} \Phi_{j\alpha} \equiv 0$，および $D_{\alpha\alpha\alpha}$，$D_{\alpha\alpha\alpha\alpha}$ を求める。((8),(9)の i.j.k.l は dummy index)

$$D_{\alpha\alpha\alpha} = V^*_{ijk} \Phi_{i\alpha} \Phi_{j\alpha} \Phi_{k\alpha} \qquad (8) \qquad\qquad D_{\alpha\alpha\alpha\alpha} = V^*_{ijkl} \Phi_{i\alpha} \Phi_{j\alpha} \Phi_{k\alpha} \Phi_{l\alpha} \qquad (9)$$

STEP 4　座屈点 $D_{\alpha\alpha} \equiv 0$（添字 c : Critical で表わす）での4つの分類（Fig.1 参照）にもとづいて、不安定性の判定を行なう。

3.　数値解析モデル

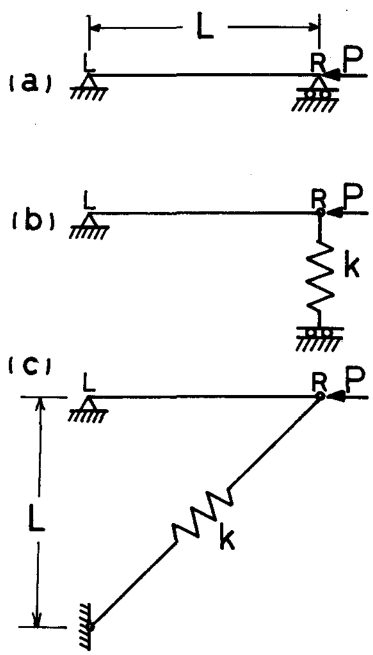

Fig.2

1）安定対称座屈モデル（Fig.2 (a)）

単純ばりの軸圧縮および周辺単純支持正方形板の面内圧縮について解析。

2）不安定対称座屈モデル（Fig.2 (b)）

バネのひずみエネルギー U_s（バネ定数 k）

$$U_s = \frac{1}{2} K^S_{ij} w_i^E w_j^E \qquad \text{ただし}\ K^S_{ij} = \frac{1}{2} k \delta_{iR} \delta_{jR} \quad \left(\begin{array}{l} \delta_{ij} : \text{Kronecker delta} \\ R : \text{R点を示す} \end{array} \right) \qquad (10)$$

$$[K^0_S] = [K^0] + \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & K^S_{ij} \end{array} \right] \qquad (11)$$

3）非対称座屈モデル（Fig.2 (c)）

$$U_s = \frac{1}{2} K^{A1}_{ij} w_i^E w_j^E + K^{A2}_{ijk} w_i^E w_j^E w_k^E + K^{A3}_{ijkl} w_i^E w_j^E w_k^E w_l^E \qquad (12)$$

ただし、$K^{A1}_{ij} = \frac{1}{2} k \delta_{iR} \delta_{jR}$　　$K^{A2}_{ijk} = \frac{1}{8L} k \delta_{iR} \delta_{jR} \delta_{kR}$

$$K^{A3}_{ijkl} = -\frac{3}{32L^2} k \delta_{iR} \delta_{jR} \delta_{kR} \delta_{lR}$$

$$[K^0_A] = [K^0] + \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & K^{A1}_{ij} \end{array} \right]$$

$$[K^I_A] = [K^I] + \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 6 K^{A2}_{ijk} w^E_k \end{array} \right] \qquad [K^{II}_A] = [K^{II}] + \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 12 K^{A3}_{ijkl} w^E_k w^E_l \end{array} \right] \qquad (13)$$

なお、計算結果は当日スライドで示す。

4.　参考文献

1) 円羽・渡辺・中川　構造物の静的不安定性に関する基礎的研究

2) Thompson, J. M. T. and G. W. Hunt, A General Theory of Elastic Stability, John Wiley and Sons, 1973