

ベイズ理論による構造物の信頼性解析への一考察

京都大学 正員 白石 虎人

京都大学 正員 古田 均

京都大学 学生員 中野 正則

京都大学 渡藤 勝彦

[1] まえから

構造物の安全性を評価する場合統計的不確定性あるいはその他の不確定性を考慮できるとしてベイズ理論がある。そこでは母数をも確率変数と考えられ、標本からの情報に工学的判断を加味して、母数を合理的かつ組織的に推定しようとしている。本研究では、ベイズ理論を用いた信頼性解析について検討を加える。まず拡張信頼性、ベイズの方法と比較検討を行ない、その考え方が従来のどのように使われているかを明確にする。つぎに保証強度試験に注目して、保証試験や他の試験から得られる情報の信頼性推定への影響を調べる。さらに、費用に注目し、最適な標本数に対する一つの示唆を与える。

[2] ベイズ理論と拡張信頼性理論との関連

ベイズ確率を用いた母数 θ の推定は、

$$f''(\theta) = k \cdot \ell(\theta | \text{sample}) f'(\theta) \quad \text{--- (1)}$$

ここで
 k : 正規化係数
 $\ell(\theta | \text{sample})$: 尤度関数
 $f'(\theta), f''(\theta)$: 事前および事後分布

のように定式化される。¹⁾ (1)式において、標本から得られる情報が尤度関数に反映される。一方過去、同様な試験などから得られる間接的情報や技術者の経験や直観に基づき工学的判断により、事前分布の型や尤度関数の型が決定される。これに対し、A. Ang. の拡張信頼性理論²⁾では確率変数を次式のように表わし、種々の不確定性を補正係数や予測モデルに含めている。

$$X_i = N_{xi} \cdot \hat{X}_i \quad \text{--- (2)}$$

ここで
 X_i : 基本設計変数 (平均値 μ_{xi} , 全不確定量 σ_{xi})
 N_{xi} : 補正係数 (平均値 $\bar{N}_{xi}$, 変動係数 δ_{xi})
 $\hat{X}_i$: 予測モデル (平均値 $\hat{\mu}_{xi}$, 標準偏差 σ_{xi} , 変動係数 $\delta_{xi} = \sigma_{xi} / \hat{\mu}_{xi}$)

Bayesian との関連を模式的に Fig. 1 に示す。図より Ang. の方法で、最初から分布形を規定し、 N_{xi} を母数とし、標本 X_i を組み入れる尤度関数として補正係数を考えれば、Bayesian と同じ形をしていることがわかる。つぎに両者の関連をより明確にするためにモデルに誤差について考える。Ang. は、performance function $Z = g(X_i)$ に対して (1) 式と同様に $\theta = N_{\theta} \cdot \hat{\theta}$ と表わしている。この点については形式的にうかがうことになる。

$$g(X_i) = \int_{N_{\theta}} N_{\theta} \cdot \hat{g}(X_i, \theta) f(N_{\theta}) dN_{\theta} \quad \text{--- (3)}$$

(3) 式は、 N_{θ} を母数を含んだ尤度関数と考えれば、Bayesian と同じ形をしている。

[3] 保証強度試験への Bayesian の適用

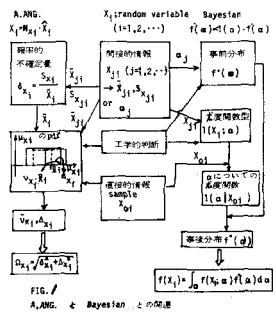
ここでは保証強度試験を行ない構造物を製作する場合、その試験から得られる情報の信頼性解析への影響を調べる。古典的信頼性理論を用いると、保証強度試験を行なった後の安全性は次式 P_2 を求めることにより計算される。³⁾

$$P_2 = \iint_{R \cup D} \tilde{f}_R(r) \tilde{f}_D(d) dr dd \quad \text{--- (4)}$$

$$\tilde{f}_R(r) = \frac{H(r - \hat{\sigma}_p)}{1 - F_R(\hat{\sigma}_p)} f_R(r) \quad \text{--- (5)}$$

ここで $\hat{\sigma}_p$: 保証強度
 σ : X の
 $H(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

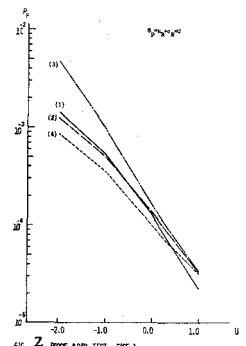
つぎに Bayesian を用いた場合、試験方法あるいは情報の使いかたにより、(4), (5) が考えられる。



(2) 降伏試験のデータを尤度関数の標本として用いて、 NP は抵抗 R の分布型 $f_R(r)$ の修正 (5式) のみに用いる方法。

(3) (2)の方法で、 NP を降伏値のみならず尤度関数の標本に加える方法。

(4) 降伏試験のデータのみに尤度関数の標本とし、 NP は抵抗 R の分布型 $f_R(r)$ はかりとなく、尤度関数型 $f(x)$ の関数型へ修正にも用いる方法。



以上4つの方法で NP を変化させ P_f を計算した結果を Fig. 2 に示す。図からわかる P_f の間隔は大きい。降伏値として NP という安全側のデータを用いたためである。しかしデータ数が増えたという点からデータの使い方が違いということから、計算された P_f の値は違うと性格が異なる。また、仮定全体的に P_f が小さいという修正した尤度関数のデータに対してノールダーの定目を果しているにりと考えられる。さらに NP が大きい、なればこの方法はよくとほどと変わるなくなるが、これは NP 以上のデータの量が増えることによると考えられる。

図2は、 P_f の間隔は大きい。降伏値として NP という安全側のデータを用いたためである。しかしデータ数が増えたという点からデータの使い方が違いということから、計算された P_f の値は違うと性格が異なる。また、仮定全体的に P_f が小さいという修正した尤度関数のデータに対してノールダーの定目を果しているにりと考えられる。さらに NP が大きい、なればこの方法はよくとほどと変わるなくなるが、これは NP 以上のデータの量が増えることによると考えられる。

4. 標本数とコストとの関連

図3の結果を用いて、標本数 n に対するコストの変化と最適コストについて調べる。ここでは、コストとしてこのように考える。

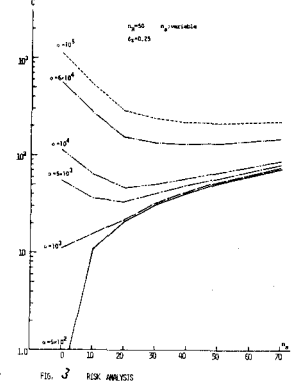
$$Cost = C' + C_1 P_f + C_2 n + C_3 n' \quad \dots (10)$$

ただし、 C' : 定数項 (建設コストなど)、 C_1 : 構造物が破壊した場合の損失
 C_2, C_3 : それぞれ降伏試験、保証試験における1標本当りのコスト
 n, n' : 降伏試験標本数、保証試験標本数

ところが、 n' が一定の場合、 $C' + C_3 n'$ は定数となるから (10) 式は

$$C = C_1 P_f + C_2 n = C_2 (x P_f(u) + n) = x P_f(u) + n \quad (11) \quad \text{ただし } x = C_1 / C_2$$

となる。この (11) 式について、 x をパラメータとして、 x と n の関係を Fig. 3 に示す。図より x が大きい (i.e. C_1 大) 場合は、 C を最小にする最適標本数 n_{opt} は大きいことになる。これは破壊による損失が大きい場合は、 P_f を小さく (精度良く) するように、 n を増やしてあげることが示している。逆に、 x が小さい場合は、 n_{opt} は小さく、 $n_{opt} = 0$ となる場合もある。これは破壊損失が小さいものは試験により P_f を小さくする以上に、試験のコストが大きくなることを示している。さらにこの考え方を図2で述べた保証強度試験を行なった場合に拡張して最適な試験方法、あるいは試験標本数 n について考察する。(数値計算結果が次の詳細な図面の都合上、当日発表する。)



5. 結論 および今後の課題

ベイズ理論に注目し、拡張信頼性解析法、構造を明確にし、保証強度試験などを行なうことにより、得られる情報と信頼性との関連について考察を加えた。ベイズの考え方をを用いると工学的判断と試験結果というものが自然に融合することが可能であり、その試験による *effectiveness* を P_f で測ることにより、最適な試験方法あるいは標本数に対する1つの示唆が与えられると思われる。

参考文献 1) C. Allin Cornell: "Bayesian Statistical Decision Theory and Reliability-based Design" editor A. Brandenthal, 3) 1976
 2) A. H. Ang: "Series of lectures on Structural Reliability and Probability-based design", April, 1976, lecture note
 3) Masamoto Ishiyama: "Method of Safety and Reliability Analysis" editor Brandenthal, Pergamon Press, 1977