安全性解析におけるリライアビリティーメジャーについて

京都大学工学部　正員　白石成人
京都大学工学部　正員○古田　均

<u>1.まえがき</u>----よく知られているように信頼性解析の安全性を示すパラメーターとして破壊確率 P_f（or. 残存確率 $1-P_f$）と安全性指標 β がある。[1] 安全性指標 β はその値自体の物理的、工学的意味は破壊確率ほど明確ではないが、その計算は容易であり、分布形あるいは設計変数に対する鋭敏性もあまりなく、近似的ではあるにしてもその設計への導入は容易である。本研究では、この安全性指標の工学的意味を探るために設計ではなく安全性解析における β の定義について触れ、統計的不確定性との関連について調べる。また、簡単な例題を用い、多くの破壊モードをもつ場合の β の決定に対し考察を行なうことにより、最適あるいは妥当な許容しうる β の決定に対する一つの示唆を与えることを試みる。

<u>2.安全性解析における β の定義</u>----本研究では *Hasofer* ＆ *Lind*[2] の β の定義を用いる。この時、安全性指標 β は破壊領域までの平均値からの 1 *unit* をその標準偏差としたときの距離により定義される。いま破壊が一次式で表わされたとき β はその境界までの距離として次のように表わされる。　$G(X_1, X_2, \cdots, X_m) = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_m X_m - \gamma < 0$　(1)

$$\beta = \Delta = \frac{\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \bar{X}_k - \gamma}{\left[\sum_{k=1}^{m} \alpha_k^2 \sigma(X_k)^2\right]^{1/2}} \qquad (2)$$

X_k ; basic variable　α_k, γ ; 定数　$\bar{X}_k$: X_k の平均値
$\sigma(X_k)^2$; X_k の分散　Δ ; 破壊領域までの距離

また、$G(X)$ が非線形で表わされるときは *Taylor* 展開をすることにより(2)式に準じた形で表わされる。ここで問題となるのは $G(X)$ 自身の妥当性、つまり解析誤差および非線形の場合の線形化に対する誤差等である。いま $G(X)$ が(1)式の形で表わされたとしても、α_i がある確率変数の平均値であると考えるとその境界も同様に確率的に存在することになり、厳密に考えていくと一般的な非線形の形となる。しかし、このように深く考えても問題が複雑化するだけであるから、ここではモデル化の誤差は小さく、β は(2)より求まると仮定する。

<u>3.安全性指標と統計的不確定性</u>----いま非常に簡単な場合として構造物の抵抗 R が確定値であり、荷重作用 S のみが確率変数の場合を考える。このとき破壊を(3)式で定義すると、β は(2)式を用い(4)式のようになる。

$$G(R, S) = R - S < 0 \qquad (3) \qquad\qquad \beta = (\bar{R} - \bar{S}) / \sigma(S) \qquad (4)$$

いま S がガウス分布に従うとし、その実測データにより平均 $\bar{S}$、標準偏差 s_s が求められたと考えると、その母集団の平均 μ_s、標準偏差 σ_s は Fiducialist 流の考え方を用い次のように関係づけられる。[3]

$$f(\mu_s, \sigma_s) = C\,\frac{1}{\sigma_s^2}\left(\frac{s_s}{\sigma_s}\right)^{n-1} \exp\left\{-\frac{n(\bar{S}-\mu_s)^2}{2\sigma_s^2}\right\} \exp\left\{-\frac{n s_s^2}{2\sigma_s^2}\right\} \qquad (5)$$

$C = n^{n/2} / \left(2^{\frac{n}{2}-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)$
n : サンプル数

μ_s, σ_s が確率変数と定義されたのでこれらの変数により表わされる β も確率変数となる。(4)(5)式を用いると β の確率密度関数 $f_\beta(\beta)$ は次式により計算される。

$$f_\beta(\beta) = C \int_0^\infty \frac{1}{\sigma_s}\left(\frac{s_s}{\sigma_s}\right)^{n-1} \exp\left\{-\frac{n(\bar{S}-\beta\sigma_s)^2}{2\sigma_s^2}\right\} \exp\left\{-\frac{n s_s^2}{2\sigma_s^2}\right\} d\sigma_s \qquad (6)$$

Fig.1 に $\bar{R} = 2200\ \mathrm{kg/cm^2}$、$\bar{S} = 1400\ \mathrm{kg/cm^2}$、$\sigma_s = 210\ \mathrm{kg/cm^2}$ とし、$n = 10, 20, \cdots, 80$ と考えたときの β の確率

密度関数を示す。データ数が少ないときβの平均$\bar{\beta}$の値は小さく、データの増加に伴ないその値は増加する。これはデータが少ないときは不確定性が強く、その破壊領域までの距離を短かく見積ることが必要であることを示している。また、その散布度はデータが多くなるにつれ小さくなっている。このこともデータ数の増加に伴ない計算されたβの値が信頼できるものになることを示している。このことから、これらの統計的不確定性を考慮し安全側に見積ろうとすると$\tilde{\beta}$は

$$\tilde{\beta} = \bar{\beta} - \varepsilon\,\sigma(\beta) \qquad (7) \qquad \varepsilon：定数$$

として求めることも可能である。しかし、いまβ自身の本来の目的は安全性の程度を示す一つの指標であるという考え方に戻るならば、上のような精密な議論は不要であると考えられる。この時、一次近似を用いるとβの期待値$E[\beta]$は以下のように求められる。

$$E[\beta] = \frac{\bar{R} - E[\mu_S]}{E[\sigma_S]} \quad (8) \qquad \begin{cases} E[\mu_S] = \bar{S} & (9) \\ E[\sigma_S] = \sqrt{\frac{n}{2}}\,\frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\,S_S = \frac{1}{k(n)}\,S_S & (10) \end{cases}$$

結局、標本平均$\bar{S}$、標本の標準偏差S_Sを用い、あるてい減率$k(n)$を乗じることにより$E[\beta]$が求められる。次にR、Sが共に確率変数の場合を考える。この時、βの確率密度を解析的に求めることは困難であるので simulation により求めている。また、一次近似を用いR, Sともそのデータ数が等しい場合のてい減率$k(n)$を Table 1 に示す。

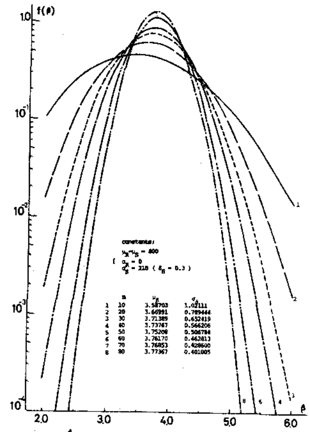

FIG. 1 PDF of β

Fig. 2 PORTAL FRAME EXAMPLE Safety Index vs. Plastic Moment Capacity

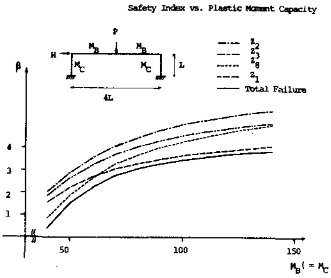

Table 1 SAMPLE NUMBER AND DECREASING COEFFICIENT

n	k(n)	n	k(n)
10	0.86698	50	0.97471
20	0.93561	60	0.97896
30	0.95751	70	0.98199
40	0.96829	80	0.98426

4. 多くの破壊モードを持つ場合のβの求め方 ---- Ref. 2) によるといま構造系がi個の破壊モードをもつときβは次式で求められるとしている。

$$\beta = \min_{i=1}^{i} \Delta_i \qquad (11) \qquad \Delta_i：iモードの破壊領域までの距離$$

しかし、この式は破壊モード間の完全従属性を仮定したものであり、同じ程度で生起する破壊モードが存在するとき、この式では危険側に評価される可能性が存在する。いま Fig. 2 に示す一層門型ラーメンについて考える。全破壊モード（この例題では8個の崩壊機構を考えている）の影響を考慮した場合、βの値はM_Bの値が増加するにつれてその差は小さくなるものの、(11)式で計算される値よりも小さくなっている。（詳細は当日発表）

5. 結論およびあとがき ----安全性指標の評価における統計的不確定性および多くの破壊モードをもつ場合の影響について考察を加えた。ガウス分布の仮定あるいは簡単な例題のもとでの結果であり、その値を直接用いることはできないが、実際の現象を十分研究し、これらの影響を考慮することにより、設計における妥当なβの値を決定する一つの手がかりが得られると思われる。最後に貴重なる御助言を賜った小西一郎先生に感謝の意を表します。

参考文献：1) A. Ang & C. Cornell, ASCE ST9 1974 2) A. Hasofer & N. Lind, ASCE EM1 1974 3) 藤野, 土木論文集 268号 1977