

自己回帰-移動平均法による構造物の動的パラメータの推定

京都大学防災研究所 正 員 土岐憲三
 京都大学防災研究所 正 員 ○佐藤忠信
 京都大学 工学部 学生員 生木泰秀

1. まえがき

本研究は、定常なランダム外力が作用している線形構造系の応答観測結果を用いて、系の固有振動数や減衰定数を決定するための方法論に考察を加えたものである。解析手法の骨子は、水文現象の解析などに用いられている線形定常時系列の理論を用いて、構造系の応答の予測を行い、その結果から系の動的パラメータの推定を行うことである。

線形定常時系列の代表的なものとしては、自己回帰過程(ARP)、移動平均過程(MAP)自己回帰-移動平均過程(ARMAP)の3種類があり、本研究ではARMAPを用いる。いま平均値ゼロの木ホワイトノイズ外力が作用する線形構造系の任意点の応答値を等時間間隔 T_s でサンプリングしたデータ列を $\{y_k\}$ ($k=t, t-1, \dots, t-N$) とし、入力のデータ列を $\{x_t\}$ とすれば、上記の3過程は次式のように表わされる。

$$\text{ARP}(p\text{次}) \quad y_t = x_t - \alpha_1 y_{t-1} - \alpha_2 y_{t-2} - \dots - \alpha_p y_{t-p} \quad (1)$$

$$\text{MAP}(q\text{次}) \quad y_t = x_t + h_1 x_{t-1} + h_2 x_{t-2} + \dots + h_q x_{t-q} \quad (2)$$

$$\text{ARMAP}(p\text{次}, q\text{次}) \quad y_t = -\alpha_1 y_{t-1} - \alpha_2 y_{t-2} - \dots - \alpha_p y_{t-p} + x_t + h_1 x_{t-1} + \dots + h_q x_{t-q} \quad (3)$$

なお、ARPとMAPの係数間には次式の関係式が成立しなければならない。

$$h_i = -\sum_{j=1}^p \alpha_j h_{i-j} \quad (i=1, 2, \dots) \quad (4)$$

2. システムの同定

線形構造物系がホワイトノイズ外力を受ける場合の運動方程式は次式となる。

$$[M]\{\ddot{z}\} + [C]\{\dot{z}\} + [K]\{z\} = \{f\} \quad (5)$$

ここに、 $[M]$, $[C]$, $[K]$: 各々、質量、粘性係数、剛性マトリックス、 $\{z\}$: 節点変位ベクトル、 $\{f\}$: 外力ベクトル である。

いま、構造系の j 節点の観測値を時間間隔 T_s でサンプリングしたものを $z_j(tT_s)$ とし、これにノイズ $\eta(tT_s)$ が加わったものを y_t とすれば、 $y_t = z_j(tT_s) + \eta(tT_s)$ さらに、式(5)の系の自由度が n 次とすれば、 y_t は $(2n, 2n)$ 次のARMAPで表現でき、次式のようになる。²⁾

$$y_t = x_t - \sum_{i=1}^{2n} a_i y_{t-i} + \sum_{i=1}^{2n} b_i x_{t-i} \quad (6)$$

式(6)の係数 a_i と構造系の j 次モードの固有円振動数 ω_j と減衰定数 h_j との間には次の関係式が与えられる。³⁾

$$\sum_{j=0}^{2n} a_j \lambda^{2n-j} = \prod_{j=1}^{2n} (\lambda - \lambda_j)(\lambda - \lambda_j^*) \quad \left. \begin{matrix} \lambda_j \\ \lambda_j^* \end{matrix} \right\} = \exp(-\omega_j h_j T_s \pm i \omega_j T_s \sqrt{1-h_j^2}) \quad (7)$$

3. AR-MA過程のパラメータの推定

式(6)の係数 a_i, b_i は入力の分散の推定値 σ_x^2 と応答の自己相関マトリックス $[cyy(k)]$ を用いて以下のように推定できる。⁴⁾

$$\{\theta\} = [C]\{\gamma\} \quad (8)$$

$$\text{すなわち, } \{\theta\} = \{a_1, a_2, \dots, a_{2n}, b_1, b_2, \dots, b_{2n}\}^T, \{\gamma\} = \{-cyy(1), \dots, -cyy(2n), cxy(1), \dots, cxy(2n)\}^T$$

$$[C] = \begin{bmatrix} cyy(0) & \dots & cyy(2n-1) & -cxy(0) & \dots & -cxy(2n-1) \\ cyy(2n-1) & \dots & cyy(0) & -cxy(1-2n) & \dots & -cxy(0) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -cxy(0) & \dots & -cxy(2n-1) & cxx(0) & \dots & cxx(2n-1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -cxy(1-2n) & \dots & -cxy(0) & cxx(2n-1) & \dots & cxx(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} cyy(k) &= E(y_t y_{t+k}) \text{ , } cxy(k) = E(x_t y_{t+k}) = cyx(k) \\ cxx(k) &= \{ \sigma_x^2(k=0) \text{ , } 0(k \neq 0) \} \\ cyx(k) &= \{ h_k \sigma_x^2(k \geq 0) \text{ , } 0(k < 0) \} \end{aligned}$$

4. 数値計算例

以上に述べた手法の妥当性を検証するために、図1に示すようなホワイトノイズの加速度を入力とする1自由度系の変位応答を用いて、固有振動数と減衰定数の推定を行った。以下、応答解析に用いた固有振動数と減衰定数を (f_0, h_0)

とし、各々の推定値を (f_s, h_s) と表わすことにする。図2は $h_0 = 5\%$ とし f_0 を変化した場合の f_s を示したものである。推定値の精度は系の固有振動数 f_0 、減衰定数 h_0 、データのサンプリング間隔 T_s 、およびデータ数 N によって変化する。いま、 $N f_0 T_s$ なる指標を用いると、図中の各点は $25 \leq N f_0 T_s \leq 250$ の領域に入っている。したがって、 $h_0 = 5\%$

の系では $N f_0 T_s$ の値として25以上を取れば十分である事が判明する。図3は $f_0 = 3\text{Hz}$ とし、 h_0 を変化した場合のものである。この場合には $N f_0 T_s$ の値が150以上にならなると精度の良い推定値を与えないうのである。

図4は ARMAP の係数から推定したパワースペクトルを示している。図中の細実線は Blackman-Turkey 法によって求めたものである。ARMAP より求めたスペクトルの分解能の良し事が明らかになる。なお、多自由度系の数値解析例は講演時に発表する。

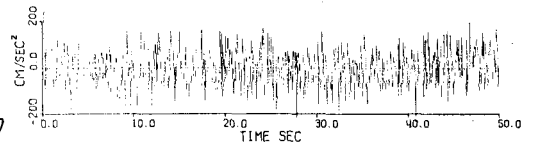


図-1 入力加速度波形

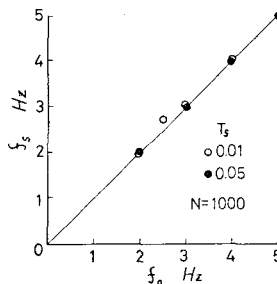


図-2 固有振動数の推定

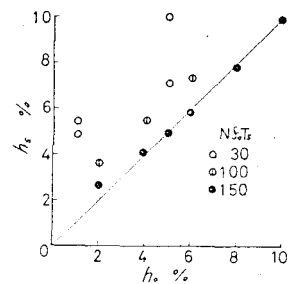


図-3 減衰定数の推定

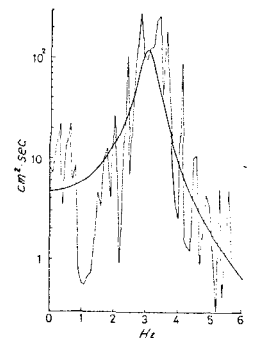


図-4 パワースペクトルの推定

- 参考文献 1) Box, G. P. & Jenkins, G. M.: Time Series Analysis (Forecasting and Control) 1970 Holden-Day. 2) Lee, R. C. K.: Optimal Estimation Identification, and Control, 1964, MIT Press. 3) Gersch, W. & Liu, R. S.-Z.: Time Series Methods for the Synthesis of Random Vibration System, Jour. App. Mech, pp. 159-165, 1976. 4) Gersch, W. et al.: Structural System Parameter Estimation, ASCE, EM.5, 1976, pp. 883-899.