履歴型の塑性変形に関する研究

京都大學工學部　正会員　山田　善一
岡山大学工学部　正会員　竹宮　宏和
京都大學大學院　学生員○野田　　茂

1．まえがき

構造物の終局耐震安全性と破壊規範を解明するには、弾塑性系の崩壊機構を論じる必要がある。確率論的な尺度で定量的かつ普遍的に評価するために、ランダムな加振に対する非線形系がメモリー・タイプであれば、新たに確率変数を積極的に導入する立場が好ましい。そこで，弾塑性ランダム振動の基本モデルと力学状態を忠実にとらえ，塑性応答量を確率統計的に追求することが本研究の基本目的である。

2．解析方法

最近、復元力特性の弾塑性モデルの応答サンプルを、弾性部分と塑性部分に分ける表現が盛んである。

今、Fig.1 に示す力学モデルにおいて、クーロン・スライダーを含むバネのストレッチを w とすれば、系の確率統計的特性は Kolmogorov-Fokker-Planck 方程式[1]に支配され、基本的に次の確率方程式となる。

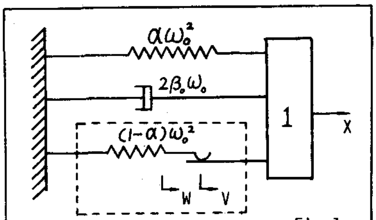

Fig.1

$$\frac{d}{dt}\{u\}=[D]\{u\}+\{F\} \tag{1}$$

ここで、

$$\{u\}=\{E[x^2],E[\dot{x}^2],E[\dot{x}w],E[xw],E[\dot{x}x],E[w^2]\}^T,\qquad \{F\}=\{0,\tfrac{1}{2}\pi\omega_0^2N^2,E[\dot{w}\dot{x}],E[x\dot{w}],0,2E[w\dot{w}]\}$$

$$[D]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2\beta_0\omega_0 & -2(1-\alpha)\omega_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\beta_0\omega_0 & -\alpha\omega_0^2 & 0 & -(1-\alpha)\omega_0^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha\omega_0^2 & 1 & 0 & -(1-\alpha)\omega_0^2 & -2\beta_0\omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ところで，重要なことは，従来 Karnopp & Sharton[2]に代表される artificial process の形成する確率密度関数に正規性を仮定することである。１つの状態変数 $w=x-H(|w|-Y)x$ と $\dot{x}$ の確率密度関数は，

$$p_{w\dot{x}}(w,\dot{x})=\begin{cases} p_e(w,\dot{x}) & ;\ |w|<Y-\varepsilon \\ p_w(Y)\,\delta(|w|-Y)\,p_{\dot{x}}(\dot{x})\,H(|w|) & ;\ Y-\varepsilon\le|w|\le Y \end{cases} \tag{2}$$

で規定されるが、$p_w(Y)$ と $p_{\dot{x}}(\dot{x}\,|\,|w|=Y)$ の確率を決定する必要がある。

$p_w(w)$ について

$$p_w(w)=func.(\sigma_w,Y) \tag{3}$$
$$=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\lambda Y}\exp\left(-\dfrac{w^2}{\lambda^2Y^2}\right) & ;\ |w|<Y \\ \dfrac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)\delta(|w|-Y) & ;\ |w|=Y \end{cases}$$

ここで、$\lambda=func(\alpha,\sigma_w/Y)$ は次の超越方程式の解である。

$$\sigma_w^2/Y^2=\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\left\{\frac{\lambda}{\sqrt{2}}-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left(-\frac{1}{\lambda^2}\right)\right\}+\left(1-\frac{\lambda^2}{2}\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

あるいは、$p_w(Y)$ の評価は実験的に決定される。

$p_{\dot{x}}(\dot{x}\,|\,|w|=Y)$ について

従来の研究は正規性の導入であったが、本質的には系の動力学的確率微分方程式で規定され、次式を得る。

$$p_{\dot{x}}(\dot{x}\,|\,|w|=Y)=\frac{Y^2}{4\pi\omega_0N^2}\exp\left(-\frac{Y^2}{\pi\omega_0N^2}|\dot{x}|\right)\mathrm{erfc}(\lambda')+\frac{1}{2\pi\omega_0N(\omega_0t)^{\frac{1}{2}}}\exp\left[\frac{Y^2}{2\pi\omega_0N^2}(\dot{x}-|\dot{x}|)-\frac{1}{4\pi\omega_0^3N^2t}(\dot{x}-\dot{x}_0+\omega_0^2Yt)^2\right] \qquad (4)$$

ここに、$\lambda'=\frac{\dot{x}_0+|\dot{x}|}{2\omega_0N(\pi\omega_0t)^{\frac{1}{2}}}$、$\dot{x}_0$ は初期条件に依存し、確率的に評価される。

解析のプロセスで必要な $E[\dot{x}\,|\,|w|=Y]$ の今一つの Key は，エネルギー振幅の Fokker-Planck 式である。例えば、Rayleigh 分布であると、

$$E[\dot{x}\,|\,w=Y]=\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}\,\omega_0\sigma_x\frac{1}{p_w(Y)}\mathrm{erfc}\left(\frac{Y}{\sqrt{2}\,\sigma_x}\right)$$

塑性変形量は，確率量の導入によって(1)式を反復収束計算することにより解くことができる。

解析的に、塑性流動中の外力の平均値が零であれば、平均塑性変形量、降伏平均時間は次式となる。

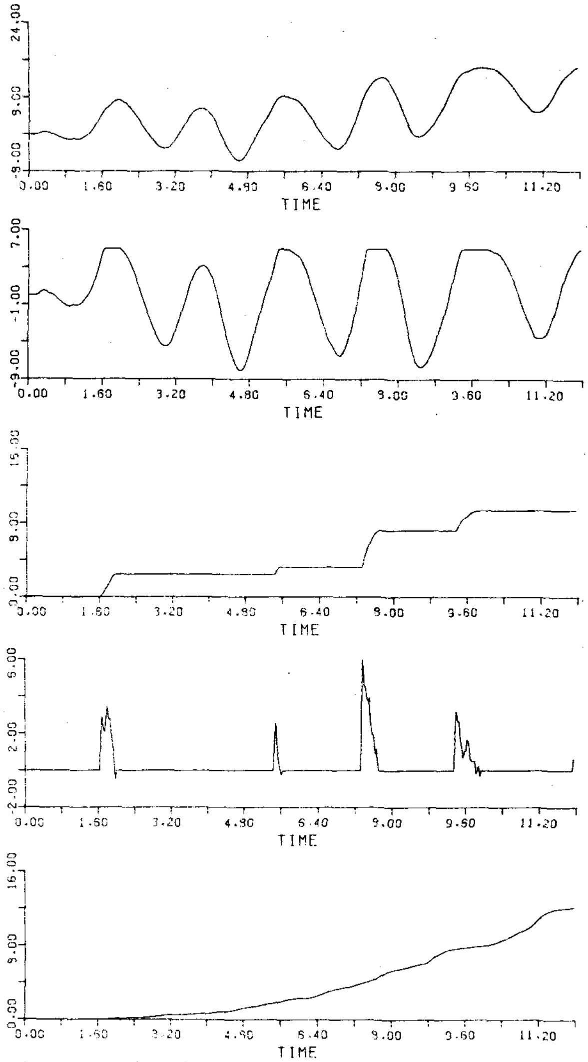

Fig.2

$$E[v]=I_1E[\dot{x}\,|\,|w|=Y]+I_2Y \qquad (5)$$

$$t_1=\frac{1}{\omega_0\sqrt{\alpha-\beta_0^2}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\alpha-\beta_0^2}\,E[\dot{x}\,|\,|w|=Y]\Big/\left(Y\left(1-\frac{2\beta_0^2}{\alpha}\right)-\beta_0E[\dot{x}\,|\,|w|=Y]\right)\right) \qquad (6)$$

ここで、

$$I_1=\frac{1}{\omega_0\sqrt{\alpha-\beta_0^2}}\exp(-\beta_0\omega_0t)\sin(\omega_0\sqrt{\alpha-\beta_0^2}\,t)$$

$$I_2=1-\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha-\beta_0^2}}\exp(-\beta_0\omega_0t)\left(\beta_0\sin(\omega_0\sqrt{\alpha-\beta_0^2}\,t)+\sqrt{\alpha-\beta_0^2}\cos(\omega_0\sqrt{\alpha-\beta_0^2}\,t)\right)$$

Fig.2 に結果の一部を示す。上段から，変位 x，バネのストレッチ w，塑性すべり量 v とその速度 $\dot{v}$ の応答プロセス，さらに $E[w^2]$ である。

References

(1) R.L.Stratonovich; "Topics in the Theory of Random Noise", Vol.1, Gordon and Breach

(2) D.Karnopp and T.D.Sharton; "Plastic Deformation in Random Response", The Journal of ASA, Vol.39, No.6, 1966, pp.1154-1161.