積分方程式法の非線形問題への適用について

福井大学工学部　　福井卓雄

本報文は非線形境界値問題を積分方程式法により解く場合の手法について考察したものである。　一般に境界値問題の解はある関数空間に含まれており，もちろん関数空間は線形空間であるから，その空間の基底を $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ とすれば解 u は $u=\sum a_i\varphi_i$ で表わされるはずである。近似解としては，空間を有限次元で近似して，$u=\sum^{N} a_i\varphi_i$ という形を得るのが普通である。　一般には N として小さい値がとれる程効率の良い近似であるといえる。　問題が線形のときには基底 φ_i として問題の一部を満足するものを選んでくれば効率の良い近似が期待される。　積分方程式法は問題に対応する線形作用素への特異解を近似関数空間の基底とする近似解法であり，線形問題に対しては境界上でだけ未知関数を考慮すれば良い，即ち，問題の幾何学的次元を一つ下げることができるものである。
非線形問題　　$\mathbb{N}(u)=-f$ on Ω，　$u=g$ on $\partial\Omega$　　について考えよう。　非線形作用素 $\mathbb{N}$ が，ある線形作用素 $\mathbb{L}$ により，$\mathbb{N}=\mathbb{L}+\mathbb{M}$ と表わせるならば，上の問題は次のように書ける。

$$(1)\qquad \mathbb{L}u=-(\mathbb{M}(u)+f)=-f^*(u)\quad \text{on } \Omega,\qquad u=g\quad \text{on } \partial\Omega.$$

即ち，$f^*(u)$ が決まれば，線形問題の解とまったく同様の解の表現が可能である。

最も簡単な例として，断面一定の棒の弾塑性ねじり問題を考える。　棒は完全弾塑性体であり，降伏条件は von Mises の条件に従うとする。　棒の軸方向に z 軸を，断面内に x-y 軸をとり，断面内で応力関数 $u(x)=u(x,y)$（$\tau_{xz}=\partial u/\partial y$，$\tau_{yz}=-\partial u/\partial x$）を定義する。　このとき降伏条件は $\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2=k^2$ 即ち，$|\mathrm{grad}\, u|=k$ となる。　z 軸まわりのねじり率 θ が与えられたとき，弾塑性ねじりの境界値問題は次のようになる。

弾性域で　　$\Delta u=-f$，$|\mathrm{grad}\, u|<k$，　　塑性域で　　$|\mathrm{grad}\, u|=k$.

境界上で　　$u=g$　　　（$f=2G\theta$，　$g=0$ または const）.

ここに，G はせん断弾性定数，Δ は Laplace 作用素を表わす。　領域内の関数 f および境界上の関数 g は問題の一般化のために導入した。

弾性問題：ねじり率 θ がある値 θ^* よりも小さいときには塑性域は発生せず，断面全体が弾性域である。　まず，この場合について近似積分方程式（代数方程式）を導く。　簡単のために断面 Ω は単連結であり，その境界 $\partial\Omega$ は十分に滑らかであるとする。　この問題に対応する変分境界値問題は Babuška により次のように与えられている。（以下，$H^1(\Omega)$，$H^{-1}(\Omega)$ 等は Sobolev 空間とその共役空間を表わす。）　即ち，与えられた $f\in H^{-1}(\Omega)$，$g\in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ に対して，$(u,\lambda)\in\mathcal{U}\equiv H^1(\Omega)\times H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ を次の式を満足するように決める。

$$(2)\qquad \int_\Omega \mathrm{grad}\, u\cdot \mathrm{grad}\, v\, dx-\int_{\partial\Omega}(\lambda v+\mu u)\, ds=\int_\Omega f v\, dx-\int_{\partial\Omega} g\mu\, ds\quad,\quad \forall(v,\mu)\in\mathcal{U}$$

この変分境界値問題の近似解法について考えよう。　まず，応力関数 $u(x)$ を無限領域での Green 関数 $G(x;y)$（$\Delta G(x;y)=-\delta(x-y)$　$x,y\in\mathbb{R}^2$）を用いて

$$(3)\qquad u(x)=\int_\Omega G(x;y)\,p(y)\,dy+\int_{\partial\Omega} G(x;\xi)\,\varphi(\xi)\,ds_\xi$$

のように表わす。　$p(y)$，$\varphi(\xi)$ として適当なものをとれば，$u\in H^1(\Omega)$ とすることができる。　さらに，$p, v, \varphi, \lambda, \mu$ の近似として，補間関数 $A_i(x)$，$B_k(\xi)$（$i=1,\cdots,N$，$k=1,\cdots,M$）を用いて

$$p(x) \simeq \sum^{N} A_i(x) p_i,\ v(x) \simeq \sum^{N} A_i(x) v_i,\quad \varphi(\xi) = \sum^{M} B_i(\xi)\varphi_i,\ \lambda(\xi) = \sum^{M} B_i(\xi)\lambda_i,\ \mu(\xi) \simeq \sum^{M} B_i(\xi)\mu_i$$

とおくと，$u(x) \simeq \sum_i^N \widehat{A}_i(x) p_i + \sum_k^M \widetilde{B}_k \varphi_k$ （$\widehat{A}_i(x) = \int_\Omega G(x;y) A_i(y) dy$，$\widetilde{B}_k(x) = \int_{\partial\Omega} G(x;\xi) B_k(\xi) d\sigma_\xi$）となる。

このとき 式(2) は

$$\int_\Omega \Big(\sum^{N} A_i(x) p_i - f\Big) \sum^{N} A_j(x) v_j - \int_{\partial\Omega} \Big\{ \sum^{M} B_k(\xi)\lambda_k - \frac{\partial}{\partial n}\Big(\sum^{N} \widetilde{A}_i(\xi) p_i + \sum^{M} \widetilde{B}_k(\xi)\varphi_k\Big)\Big\} \sum^{M} A_j(\xi) v_j\, d\sigma_\xi$$
$$- \int_{\partial\Omega} \Big(\sum^{N} \widetilde{A}_i(\xi) p_i + \sum^{M} \widetilde{B}_k(\xi)\varphi_k - g\Big) \sum^{M} B_j(\xi)\mu_j\, d\sigma_\xi = 0$$

となる。ただし，$\partial/\partial n$ は外法線微分の領域内からの極限値であるとする。任意の $\{v_j\}$，$\{\mu_j\}$ について上式が成立するためには，

(4)
$$\sum_i^N \Big(\int_\Omega A_i(x) A_j(x) dx\Big) p_i = \int_\Omega A_j(x) f(x) dx \qquad \text{即ち，} p(x) = f(x)$$
$$\sum_i^M \Big(\int_{\partial\Omega} \widetilde{B}_i(\xi) B_j(\xi) d\sigma_\xi\Big) \varphi_i = \int_{\partial\Omega} B_j(\xi) g(\xi) d\sigma_\xi - \sum_k^N \Big(\int_{\partial\Omega} \widehat{A}_k(\xi) B_j(\xi) d\sigma_\xi\Big) p_k$$
$$\sum_i^M \Big(\int_{\partial\Omega} B_i(\xi) A_j(\xi) d\sigma_\xi\Big) \lambda_i = \sum_k^N \Big(\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \widehat{A}_k}{\partial n}(\xi) A_j(\xi) d\sigma_\xi\Big) p_k + \sum_i^M \Big(\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \widetilde{B}_i}{\partial n}(\xi) A_j(\xi) d\sigma_\xi\Big) \varphi_i,\quad \text{即ち } \lambda(\xi) = \frac{\partial u}{\partial n}(\xi)$$

が満足されなければならないが，結局，本質的な未知関数は境界上の $\varphi(\xi)$ だけであり，式(3)の表現の中の $p(x)$ は，はじめから $p(x) = f(x)$ とおいておいても変りがないことがわかる。

<u>弾塑性問題</u>：$\theta > \theta^*$ の場合を考える。簡単のために境界条件として $u = 0$ の場合を考える。この場合の変分境界値問題は式(2)のような等式ではなく，不等式になる。[1] 即ち，与えられた $f \in H_0^1(\Omega)$ に対して $u \in K \equiv \{v \mid v \in H_0^1(\Omega),\ |\mathrm{grad}| \leqq k \text{ a.e. on } \Omega\}$ を次の式を満足するように決める。

(5) $$\int_\Omega \mathrm{grad}\, u \cdot \mathrm{grad}\,(v-u)\, dx \geqq \int_\Omega f(v-u)\, dx, \qquad {}^\forall v \in K$$

K は $H_0^1(\Omega)$ の凸閉集合であり，左辺の双線形汎関数は $H_0^1(\Omega)$ で連続かつ coercive である。このことを条件として，上の不等式には一意の解が存在し，縮小写像 T により $u = Tu$ の解と同じになる。[2] ここに $Tu = P_K(u + \rho(\Delta u + f))$ であり，ρ は左辺の双線形汎関数の性質から導かれる数である。また P_K は $H_0^1(\Omega)$ から K への写影であり，この場合には Ω 上の関数 $\Phi(x) = k\, \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$（$\mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$ は x と境界との距離）を導入すれば，条件 $|\mathrm{grad}\, u| \leqq k$ は $u \leqq \Phi$ と等価になるから，$P_K(u) = \mathrm{Min}\{\Phi, u\}$ と考えられる。即ち，${}^\forall u^{(0)} \in H_0^1(\Omega)$ に対して繰返し操作

(6) $$u^{(n+1)} = \mathrm{Min}\{\Phi,\ u^{(n)} + \rho(\Delta u^{(n)} + f)\}$$

により $u^{(1)}, u^{(2)}, \cdots$ を作れば，繰返しの極限として解 $u(x)$ が得られる。

さて，領域 Ω に対する Green 関数を $\widetilde{G}(x;y)$（$\Delta \widetilde{G}(x;y) = -\delta(x-y)$ $x, y \in \Omega$，$\widetilde{G}(\xi;y) = 0$ $\xi \in \partial\Omega$）とし，弾性問題の解を u_0 として，応力関数 $u(x)$ を

(7) $$u(x) = u_0(x) + \int_\Omega \widetilde{G}(x;y)\, p(y)\, dy$$

で表わすことを考えよう。$\widetilde{G}(x;y)$，$u_0(x)$ は線形問題の解であるから，いずれも前に述べた方法で得られる。前と同様に近似 $p(x) \simeq \sum^N A_i(x) p_i$ を考えて式(7)，(6)に代入すると，$(n+1)$ step について，

$$u_0(x) + \sum^N \widetilde{A}_i(x) p_i^{(n+1)} = \mathrm{Min}\{\Phi,\ u_0(x) + \sum^N (\widetilde{A}_i(x) + \rho A_i(x)) p_i^{(n)}\}$$

ここに，$\widehat{A}_i(x) = \int_\Omega \widetilde{G}(x;y) A_i(y) dy$ である。N 個の点 x_j で u を決めることにすれば $p_i^{(n+1)}$ は，

(8) $$p_i^{(n+1)} = \sum_j^N [\widehat{A}_i(x_j)]^{-1} \Big(-u_0(x_j) + \mathrm{Min}\{\Phi,\ u_0(x_j) + \sum_k^N (\widetilde{A}_k(x_j) + \rho A_k(x_j)) p_k^{(n)}\}\Big)$$

となる。即ち，極限として p_i が得られ，近似解は $u(x) \simeq u_0(x) + \sum^N \widehat{A}_i(x) p_i$ となる。

式(3)の $p(x)$ とは違って，式(7)の $p(x)$ は本質的な未知関数となっている。また，$\Delta u(x) + f = \sum^N A_i(x) p_i$ より，式(8)で得られた $\sum^N A_i(x) p_i$ は式(1)の非線形項を近似的に $M(u) = -\sum^N A_i(x) p_i$ として表わしていることがわかる。

（参考文献） (1) Duvaut, G. & Lions, J.L.: <u>Inequalities in Mechanics and Physics</u>, Springer, (1976). (2) Lions, J.L. & Stampacchia, G.: Comm. Pure Appl. Math. 20, 493-519 (1967).