積分方程式による熱応力解析

京都大学工学部　正　員　丹羽義次
福井大学工学部　正　員　福井卓雄
福　島　県　正　員○原　利弘

1. はじめに

熱応力に関する問題は土木工学のみならず、金属工学あるいは機械工学などの分野でもよく取り扱かわれる問題であり、今日まで特に任意形状に対する数値解析手法として、差分法、有限要素法などの適用が数多く試みられている。一般に非定常熱応力問題は、系内の変化が静的であるという仮定の下では、非定常熱伝導問題と定常熱応力問題とに分離することができる。本報告は両者の問題に対して独立に積分方程式により定式化し、その数値解析を試みたものである。特に定常熱応力問題においては、積分方程式法を適用することにより、領域内の温度勾配を必要とせず、温度のみにより解析が可能となることを強調しておく。

2. 基礎方程式及び積分方程式への定式化

等方均質材料を仮定し、対象とする領域をD、その境界を∂Dとすれば、基礎方程式及びそれに対応する積分方程式は次のように表示される。

(1) 非定常熱伝導問題　　$\theta(x,t)$：温度変化　　$\theta_0(x)$：初期温度　　$Q(x,t)$：発熱項

$$\mathcal{M}^{x,t}[\theta(x,t)] = \nabla_x^2\theta(x,t) - \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t} = -Q(x,t) \qquad ①$$

$$F(x)\,\theta(x,t) = \int_0^t d\tau\int_{\partial D}\left[\Pi(x,y,t-\tau)\frac{\partial\theta(y,\tau)}{\partial n_y} - \frac{\partial\Pi(x,y,t-\tau)}{\partial n_y}\theta(y,\tau)\right]dS_y + \int_D \Pi(x,y,t-\tau)\,\theta_0(y)\,dV_y + \int_0^t d\tau\int_D \Pi(x,y,t-\tau)\,Q(y,\tau)\,dV_y \qquad ②$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 & x\in D \\ \frac{1}{2} & x\in\partial D \\ 0 & x\notin\bar{D} \end{cases} \qquad \Pi(x,y,t-\tau) = \frac{1}{\{2\sqrt{\pi(t-\tau)}\}^m}\,e^{-\frac{r^2}{4(t-\tau)}} \quad \text{in } R^{m+1}$$

$$r = |x-y|$$

(2) 定常熱応力問題　　$u_i(x)$：変位　　$t_i(x)$：traction　　$\tau_{ij}(x)$：応力　　X_i：物体力

$$\mathbb{L}^x_{ij}u_j + X_i - \beta\theta_{,i} = \mu\left(u_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu}u_{j,ji}\right) + X_i - \beta\theta_{,i} = 0 \qquad ③$$

$$F(x)\,u_i(x) = \int_{\partial D}\left[G_i^{(j)}(x,y)\{t_j(y) + \beta\theta(y)n_j\} - \hat{G}_i^{(j)}(x,y)\,u_j(y)\right]dS_y + \int_D G_i^{(j)}(x,y)\{X_j(y) - \beta\theta_{,j}(y)\}\,dV_y \qquad ④$$

$$G_i^{(j)}(x,y) = \frac{1}{4\pi\mu}\left\{\frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{1}{4(1-\nu)}\frac{\partial^2 r}{\partial x_i\partial x_j}\right\} \quad \text{in } R^3$$

④式は線形弾性理論と熱弾性理論との間に成立するDuhumel－Neumann's Analogyの積分表示と考えることができる。④式を直接離散化して数値解析する方法も考えられるが、基本解の特異性に注意して④式にGaussの発散定理を適用すれば④式は簡潔化されて次式のように変形される。

$$A(x)\,u_i(x)=\int_{\partial D}\left[G_i^{(j)}(x,y)\,t_j(y)-\hat{G}_i^{(j)}(x,y)\,u_j(y)\right]dS_y+\int_D\left[G_i^{(j)}(x,y)\,X_j(y)+G_{i,j}^{(j)}(x,y)\,\beta\,\theta(y)\right]dV_y \qquad ⑤$$

この式の特徴は④式に含まれていた体積積分に関する温度勾配の項が温度の項に置き換っていること並びに境界上での温度項が消滅していることである。特に温度勾配がベクトル量かつ微分量であることを考慮すれば、数値解析における離散化の場合に、入力データの軽減及び精度の向上の面で非常に的確な表示式であると考えられる。

3. 数値解析例

(1) 非定常熱伝導問題 Fig-1に示すような境界条件及び形状を有するモデルについて各境界を5分割した場合の解析結果をFig-3に示す。数値解析にあたり特に注意すべき点は、②式がFredholm型のみならずVolterra型に対しても特異積分方程式を構成している点であり、特にVolterra型に対する離散化の方法が解析結果を大きく支配する。Fig-3に示すように温度勾配及び温度が漸変するような境界条件に対しては非常に高い精度で正解を追跡することが可能であり、またstep functionのような急変する関数に対しても初期状態に若干の乱れが生じる程度であることを付記しておく。

(2) 定常熱応力問題 平面ひずみ状態の仮定の下に、Fig-2に示されるようなx軸対称な温度分布が与えられた場合の⑤式による解析結果をFig-4に示す。この解析において⑤式に表わされている体積積分の項は内部要素の境界積分に変換して評価してある。Fig-4に示されるように体積積分を必要とするような積分方程式の解析においても、体積積分による解析の低下は予想される程大きいとは考えられない。

以上両者の問題を混合境界値問題として数値解析した訳であるが、非定常熱応力問題への拡張も両者の重ね合わせとして容易に解析が可能であり、これについては当日報告する。

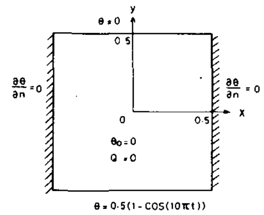

Fig-1 熱伝導モデル

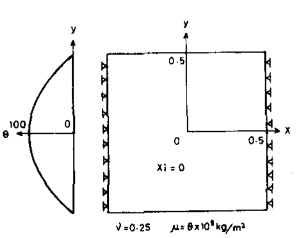

Fig-2 熱応力モデル

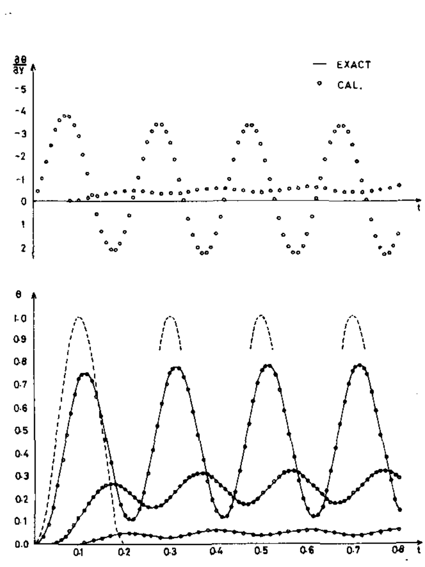

Fig-3 非定常熱伝導解析結果

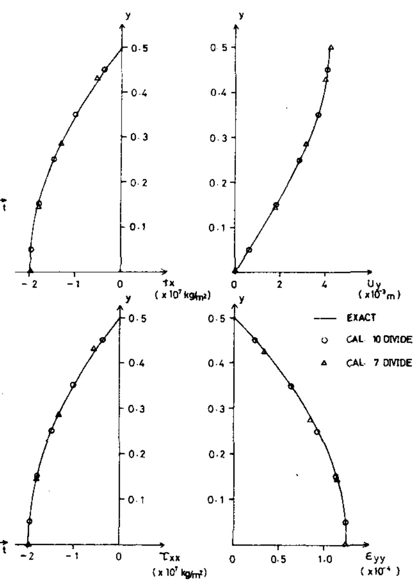

Fig-4 定常熱応力解析結果