

弾性波動問題の積分方程式による解法

京都大学工学部 正 員 丹羽義次 福井大学工学部 正 員 福井卓雄
 京都大学工学部 正 員 大津政康 京都大学大学院 学生員 〇藤本広一

1. はじめに

本研究は二次元弾性波動問題を三次元の動弾性学における Love の公式により直接的に積分方程式として定式化し、数値解析を行なうことを試みたものである。問題としては一様な無限弾性体中の空洞に P 波及び S 波が平面波として入射した場合を設定し、この際の空洞周辺の過渡応答を解析した。

2. 弾性波動問題の積分方程式への定式化

弾性体中における Navier の式は次のように表わされる。

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (1.1)$$

ここに $i, j = 1, 2, 3$ u_i ; 変位 f_i ; traction λ, μ ; Lamé の常数 ρ ; 密度

ここで変位及び物体力が一方向、例えば x_3 軸方向に對して独立である ($\partial/\partial x_3 \equiv 0$) とすると (1.1) 式は互いに独立な 2 つの式となる。

$$\mu u_{\alpha,pp} + (\lambda + \mu) u_{p,p\alpha} + f_\alpha = \rho \ddot{u}_\alpha \quad (1.2)$$

$$\mu u_{3,pp} + f_3 = \rho \ddot{u}_3 \quad (1.3)$$

ここに、 $\alpha, p = 1, 2$ であり (1.2) 式と (1.3) 式の結果を加え合わせたものが二次元問題の解となる。(1.2) 式は二次元の方程式であるが、二次元波動方程式の基本解は複雑であるので、これを等価な三次元問題として解析した。三次元弾性波動方程式に対する Love の積分表示式は次のとおりである。

$$F(\chi) u_R(\chi, t) = \sum_{i=1}^3 \int_{\partial R} [U_i^*(\chi, t; \chi | t_i(\chi, t)) - n_j \Sigma_{ij}^*(\chi, t; \chi | u_i(\chi, t))] dA_\chi \\ + \sum_{i=1}^3 \int_R [U_i^*(\chi, t; \chi | f_i(\chi, t)) + \dot{U}_i^*(\chi, t) \dot{u}(\chi) + U_i^*(\chi, t) \ddot{v}(\chi)] dV_\chi \quad (1.4)$$

ここに

$$F(\chi) = \begin{cases} 1 & (\chi \text{ が領域内にあるとき}) \\ \frac{1}{2} & (\chi \text{ が境界上にあるとき}) \\ 0 & (\chi \text{ が領域外にあるとき}) \end{cases} \quad u_i; \text{変位} \quad t_i; \text{traction} \quad f_i; \text{物体力}$$

$$\dot{u}(\chi) = u(\chi, 0) \quad \ddot{v}(\chi) = \dot{u}(\chi, 0) \quad U_i^*, \Sigma_{ij}^*; \text{第一及び第二基本解を表わすオペレーター}$$

ここで体積積分の第二、三項は入射波による影響を表わしており、これを $U_R^w(\chi, t)$ と書くものとし、 $f_i(\chi, t) = 0$ とすると (1.4) 式は次のようになる。

$$F(\chi) u_R(\chi, t) = U_R^w(\chi, t) + \sum_{i=1}^3 \int_{\partial R} [U_i^*(\chi, t; \chi | t_i(\chi, t)) - n_j \Sigma_{ij}^*(\chi, t; \chi | u_i(\chi, t))] dA_\chi \quad (1.5)$$

(1.5) 式は縦波の波速 c_1 で広がる過去錐と横波のそれによって囲まれる区画での領域積分と考えることができる。(1.5) 式を二次元問題の解の表示式とみると、第三軸は時間軸に

対応している。

3. 数値解析

上記のことから $u_i(x, t)$ が二次元問題における境界の微小区間 Δx と時間ステップ間隔 Δt 内で一定値をとるとして (1.5) 式を離散化し、時間微分に対しては二次の項までの後退時間差分で近似した。境界条件としては、無限に延びる中空円筒表面で traction が作用しないという条件 $t_i(x, t) = 0$ ($x \in \partial R$) と与えた。Fig.1 は入射波として定勾配の縦波を入れた場合の境界の変位を表わしている。 $\theta = 0, \pi/2, \pi$ における境界の変位は理論解とよく一致していると言えるだろう。ただし $\theta = \pi$ の点では波の回折現象が大きく影響しているらしく $\theta = 0, \pi/2$ 点に比べると、変位が不安定な傾向にある。Fig.2 は入射波として定勾配の横波を入れた場合の変位を表している。変位の傾向は縦波の場合とよく似ていて $\theta = \pi$ の点で変位の急激な上がりが見られるようである。Fig.3, 4 に、それぞれこれらの波を入射した場合の境界の変形を示した。境界の分割数が変位の安定性に対して大きく影響するようであり、ここでは縦波及び横波に対して、それぞれ境界を 16 等分割し、24 等分割した。また時間微分に対しては差分をとっているために、入射波の変位が急激に変化する場合には精度はあまりよくないようである。

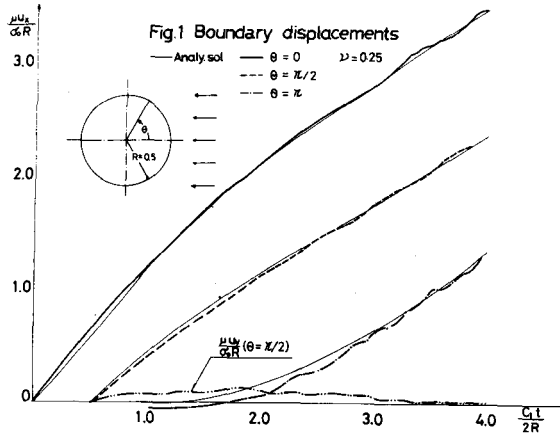


Fig.3 Boundary deformations at early transit times

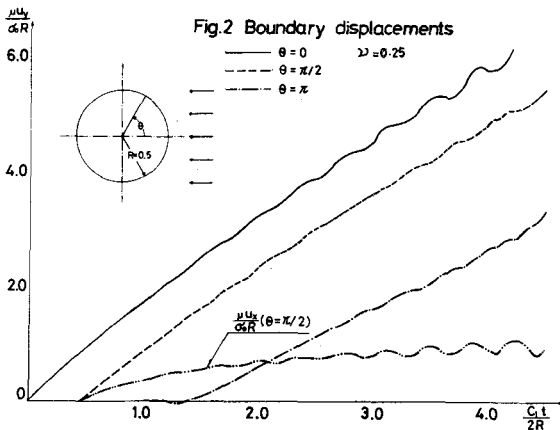
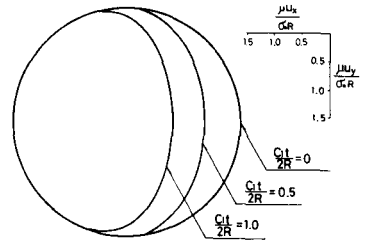


Fig.4 Boundary deformations at early transit times

