境界応力を一定とする空洞形状

京都大学工学部　学生員　○松尾哲彦
京都大学工学部　正員　小林昭一

1. はじめに

現在，地下発電所，地下原子炉等大型地下構造物の建設が土木分野での大きなテーマとなっている．したがって，強度的に最良の空洞形状を決定することは本質的かつ基本的に重要であり，有意であると考える．このような観点から，本研究では地盤を理想化して無限弾性体と想定し，与えられた応力場に対し境界応力を一定とする空洞形状を解析することを意図した．解析法としては，積分方程式法を用いた．積分方程式法はこの種の問題には有利であり，特に外部問題に対しては境界修正が容易であり，確実な精度を以て境界応力を算定することができるなどの利点がある．

2. 積分方程式の定式化

本研究では，一重層ポテンシャルによる定式化を行った．簡略に説明すると，今境界で表面力 t が与えられた時，この方法は積分方程式

$$t_i(x) = \frac{1}{2}\varphi_i(x) + \int_{\partial D} T_{ij}(x;y)\,\varphi_j(y)\,dS_y \qquad x \in \partial D \tag{1}$$

を解いて，密度 φ を求め，変位 u を

$$u_i(x) = \int_{\partial D} U_{ij}(x;y)\,\varphi_j(y)\,dS_y \qquad x \in D \tag{2}$$

より求めることに帰着する．式(1)は，$x \in D$ の内部から極限操作したときのものである．数値計算は，要素内で φ を一定とし，選点法を用いた．式(1)，(2)の素解 U_{ij}，T_{ij} の積分については，精度と計算速度を向上させる目的で厳密な積分を行った．計算精度は円孔問題（境界応力算定）で，0.1％以下の誤差であった（計算時間1秒）．

3. 形状決定の方法

本研究で用いた方法の基本的な考えは，逐次的に境界を修正した境界での応力集中を減衰させ，全体が一様応力となるまで修正を続けるという，いわゆるイテレーション法である．今，境界修正のためのパラメーターとして，無次元量

$$\varepsilon_i = (\tau_k - \tau_i)/\tau_k \tag{3}$$

を定義する．ここに添字は要素番号，τ は各要素の境界応力を示す．k は基準となる要素番号である．上記の ε_i を変数とする変換作用素を $\mathbf{D}$ とし，第 i 要素の第2節点を x_{i+1} とすると，節点の移動は，

$$\bar{x}_{i+1} = (\mathbf{1} + \mathbf{D})\,x_{i+1} \qquad \mathbf{1}：単位テンソル \tag{4}$$

に従って行われる．$\bar{x}_{i+1}$ は変換後の座標を示す．簡単にするため移動をRADIALに行うと，$\mathbf{D}$ はスカラーになり，さらに ε_i の1次式とすると

$$\bar{x}_{i+1} = (1 + k\,\varepsilon_i)\cdot x_{i+1} \tag{5}$$

という，単純な変換式が得られる．以上の実に素朴な手法を用いて次の2つの応力場に対して解析を行った．

(1) 2次元一様応力場：次の応力場を考える

$$\tau = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad (a \neq b)$$

$a=b$の時の正解は円であることが知られている．そこで，今初期形状として半径1の円を与える．最終形状を一意的に決定するには少くとも2点を固定しなければならないから，x軸上にある要素を固定し，さらに対称性からy軸上にある要素の勾配を0に固定した（図-1参照）．節点の微動はRADIALとし，その関数形は1次式すなわち式(5)を用いて境界修正を行った．また，収束をよくし修正をなめらかにするため，応力場を除々に変化させそのたびに修正を行い，目的とする応力場に対する解を求めた．例えば，$b=1$と固定しaを1から0.1ずつ増加させてゆき，$\max_i \|\varepsilon_i\|$の値が0.02以下となる形状を以て正解とした．

得られた結果は図-1に示す通り，（楕円）である．さらに，長径／短径＝τ_{xx}/τ_{yy}という結果を得られた．この問題に対しては理論解があり，それはここで得られた結果と全く同一である．

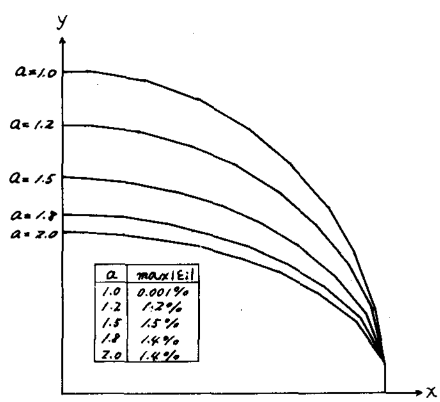
(2) 勾配を持った応力場：次の応力場を考える

$$\tau = \begin{bmatrix} ay+b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad (a \neq 0)$$

(1)と同じように，初期形状を円とし，aを0から除々に増加させて解を求めた．勾配aを変化させていった時の，形状の変化を図-2に示す．

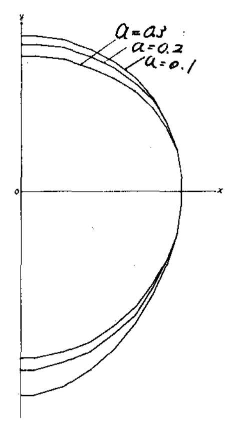
4. 考察

本手法は単純で素朴な思想に基ずいているが，数値結果を見るとこの方法の妥当性，一般性が認められる．一様応力場ではほぼ正解が得られたが，勾配を持った応力場では精度が前者に比して悪い．本手法を更に改良し有効なものとするには，**D**の形式の改善が必要であろう．



a	$\max \|\varepsilon_i\|$
1.0	0.001%
1.2	1.2%
1.5	1.5%
1.8	1.4%
2.0	1.4%

図－1



図－2