積分方程式法によるクラックの弾塑性解析

京都大学工学部　正員　小林昭一
京都大学大学院　学生員　。西村直志

1.序

積分方程式法は，線形方程式系の支配する問題に於いて有効な手法である事が近年の研究で明らかになり，精度に関する限り，弾性学の応力集中問題の一般解法としては有限要素法以上の結果を期待する事ができる事も認識されつつある．一方，この手法を非線形問題に適用しようとする試みもいくつか成されているが，今のところ確立された手法は多いとは言えない．本研究では積分方程式法の一種である一重層ポテンシアル法を基にした弾塑性解析の一手法を示し，その「問題規模の縮小」と言う特色を生かし得るクラックの問題への適用を画った．

2.ポテンシアル表示

本研究ではVon Misesの降伏条件に従う，等方完全弾塑性体を扱う．増分理論による弾塑性問題は，塑性ひずみ増分 $d\boldsymbol{\epsilon}^p$ を「ひずみの不適合」と考える事により，物体力を伴った線形弾性問題に置換えられる事がよく知られている．すなわち，つりあい式は弾性学オペレータ　$\boldsymbol{\Delta}^*\mathbf{u} \equiv \mu\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u})$　を用いて，

$$\boldsymbol{\Delta}^* d\mathbf{u} - 2\mu d\boldsymbol{\epsilon}^p\cdot\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{0} \tag{1}$$

となる．ここに $d\mathbf{u}$ は変位増分，λ，μ はLamé 常数である．そこで一重層ポテンシアルと物体ポテンシアルによって変位増分が記述できるものと仮定すれば，

$$d\mathbf{u} = \int_{\partial D}\boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,ds + \int_{D}\boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{\psi}\,dV \tag{2}$$

となる．ここに $\boldsymbol{\Gamma}$ は無限弾性体中の Greenテンソル，D は解析する物体をあらわす．$\boldsymbol{\varphi}$，$\boldsymbol{\psi}$ は適当な密度である．(2)のポテンシアル表示を(1)に代入すれば，有名な Poisson の公式 $\boldsymbol{\Delta}^*\int_D\boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{\psi}\,dV = -\boldsymbol{\psi}$ を考慮して，つりあい式

$$\boldsymbol{\psi} + 2\mu\,d\boldsymbol{\epsilon}^p\cdot\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{0} \tag{3}$$

を得る．ひずみ化オペレータ　$A\,\mathbf{u} \equiv (\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} + \mathbf{u}\boldsymbol{\nabla})/2$　を用いれば，流れ則はポテンシアル表示(2)を用いて

$$d\boldsymbol{\epsilon}^p = (\boldsymbol{\tau}'/c)\,\mathrm{tr}\left\{\boldsymbol{\tau}'\cdot A\left(\int_{\partial D}\boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,ds + \int_D\boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{\psi}\,dV\right)\right\} \tag{4}$$

となる。ここに $\boldsymbol{\tau}'$ は偏差応力，$c \equiv (2/3)\sigma_Y^2$ である．従って各ポテンシアルを支配する方程式は次の様になる．

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}) + 2\mu\left[(\boldsymbol{\tau}'(\boldsymbol{x})/c)\,\mathrm{tr}\left\{\boldsymbol{\tau}'(\boldsymbol{x})\cdot A\left(\int_{\partial D}\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})\,dS_y + \int_D\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\cdot\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{z})\,dV_z\right)\right\}\right]\cdot\boldsymbol{\nabla} \quad (\boldsymbol{x}\in D^P) \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \qquad (\boldsymbol{x}\in D^E) \tag{6}$$

ここに D^P，D^E は解析する物体中の塑性化部分，弾性部分をあらわす．次に境界条件は，表面力オペレータ　$\overset{n}{T}\boldsymbol{\epsilon} \equiv \mathbf{n}\cdot(\lambda(\mathrm{tr}\boldsymbol{\epsilon})\mathbf{1} + 2\mu\boldsymbol{\epsilon})$　を用いて，

$$\lim_{\substack{\bar{x}\to x \\ \bar{x}\in D^E}} \overset{n(x)}{T}_{\bar{x}} A_{\bar{x}}\left(\int_{\partial D}\boldsymbol{\Gamma}(\bar{x},y)\cdot\boldsymbol{\varphi}(y)\,ds_y + \int_{D}\boldsymbol{\Gamma}(\bar{x},z)\cdot\boldsymbol{\psi}(z)\,dV_z\right) = d\boldsymbol{t}(x) \qquad (x\in\partial D^E\cap\partial D) \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{\bar{x}\to x \\ \bar{x}\in D^P}} \overset{n(x)}{T}_{\bar{x}} \Big(& A_{\bar{x}}\Big[\int_{\partial D}\boldsymbol{\Gamma}(\bar{x},y)\cdot\boldsymbol{\varphi}(y)\,ds_y + \int_{D}\boldsymbol{\Gamma}(\bar{x},z)\cdot\boldsymbol{\psi}(z)\,dV_z\Big] \\ & -(\boldsymbol{\tau}'(x)/c)\,\mathrm{tr}\Big\{\boldsymbol{\tau}'(x)\cdot A_{\bar{x}}\Big[\int_{\partial D}\boldsymbol{\Gamma}(\bar{x},y)\cdot\boldsymbol{\varphi}(y)\,ds_y + \int_{D}\boldsymbol{\Gamma}(\bar{x},z)\cdot\boldsymbol{\psi}(z)\,dV_z\Big]\Big\}\Big) \\ = d\boldsymbol{t}(x) & \qquad (x\in\partial D^P\cap\partial D)\end{aligned} \tag{8}$$

となる．ここに$\boldsymbol{n}$は単位法線ベクトル，$d\boldsymbol{t}$は適当な荷重増分である．

3. 数値解析手法

上記の定式化を用いれば，平面ひずみ状態について以下の様に数値解析を行なう事ができる．まず∂Dを有限個の線分の集合，D^Pを有限個の多角形の集合（本解析では四角形）としてモデル化する．D^Eはモデル化する必要がない．次に境界要素，物体要素の中で，各各$\boldsymbol{\varphi}$，$\boldsymbol{\psi}$が一定であると仮定する．方程式(5)～(8)は境界，および物体要素中に代表点をとり，選点法を用いる事によって次の様に離散化される．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi}_i + 2\mu\Big[(\boldsymbol{\tau}'(x_i)/c)\,\mathrm{tr}\Big(\boldsymbol{\tau}'(x_i)\cdot\Big\{&\sum_k\Big(A_{x_i}\int_{I_k}\boldsymbol{\Gamma}(x_i,y)\,ds_y\cdot\boldsymbol{\varphi}_k\Big) \\ &+\sum_l\Big(A_{x_i}\int_{J_l}\boldsymbol{\Gamma}(x_i,z)\,dV_z\cdot\boldsymbol{\psi}_l\Big)\Big\}\Big)\Big]\cdot\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{0} \qquad (x_i\in J_i\subset D^P)\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{\bar{x}\to x_i \\ \bar{x}\in D^E}} \overset{n(x_i)}{T}_{\bar{x}}\Big[\sum_k\Big(A_{\bar{x}}\int_{I_k}\boldsymbol{\Gamma}(\bar{x},z)\,ds_y\cdot\boldsymbol{\varphi}_k\Big)+\sum_l\Big(A_{\bar{x}}\int_{J_l}\boldsymbol{\Gamma}(\bar{x},z)\,dV_z\cdot\boldsymbol{\psi}_l\Big)\Big] = d\boldsymbol{t}(x_i) \\ (x_i\in I_i\subset\partial D^E\cap\partial D)\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{\bar{x}\to x_i \\ \bar{x}\in D^P}} \overset{n(x_i)}{T}_{\bar{x}}\Big[&\sum_k\Big(A_{\bar{x}}\int_{I_k}\boldsymbol{\Gamma}(\bar{x},y)\,ds_y\cdot\boldsymbol{\varphi}_k\Big)+\sum_l\Big(A_{\bar{x}}\int_{J_l}\boldsymbol{\Gamma}(\bar{x},z)\,dV_z\cdot\boldsymbol{\psi}_l\Big) \\ &-(\boldsymbol{\tau}'(x_i)/c)\,\mathrm{tr}\Big(\boldsymbol{\tau}'(x_i)\cdot\Big\{\sum_k\Big(A_{\bar{x}}\int_{I_k}\boldsymbol{\Gamma}(\bar{x},y)\,ds_y\cdot\boldsymbol{\varphi}_k\Big)+\sum_l\Big(A_{\bar{x}}\int_{J_l}\boldsymbol{\Gamma}(\bar{x},z)\,dV_z\cdot\boldsymbol{\psi}_l\Big)\Big\}\Big)\Big] \\ = d\boldsymbol{t}(x_i) & \qquad (x_i\in I_i\subset\partial D^P\cap\partial D)\end{aligned} \tag{11}$$

(9)～(11)を用いれば，$\boldsymbol{\tau}$，$\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\nabla}$を前ステップの値として通常の増分計算を行なえばよい．その場合得られる線形方程式は性質の良いものであり，通常のＳＯＲでも収束する様である．

さて上記の手法の特徴は，弾性問題を扱う場合よりも１階高い微分を含む事である（式(3)）．しかも物体ポテンシアルの２回微分の項はPoissonの公式が暗示する様に，そのまま数値積分を用いると精度以前の誤りに至る可能性がある．従って物体ポテンシアルの積分は，何らかの意味で厳密に実行せねばならない．そこで本研究では，任意の点$\boldsymbol{x}$および任意の多角形Jについて $\int_J\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,dV_y$ を厳密に計算し，(9)～(11)に出現する積分項を処理している．なお境界条件を表す積分方程式(8)，(11)の計算に必要な物体の表面応力を求めるためには，一重層ポテンシアルの項も厳密に積分すべきである事は言うまでもない．この様な数値積分を一切用いない手法が，２次元問題では精度についてはもちろんの事，演算速度の面でも有利である事が確められている．

紙面の都合でここでは数値解析の結果は示さなかった．具体例は，発表当日に示す．